

Università degli Studi di Trieste

Facoltà di Scienze MM., FF., NN.

Christian Pellegrin

Analisi di immagini astronomiche
subatmosferiche ad alta risoluzione
spaziotemporale

Relatore: prof. Giorgio Sedmak

Corso di Laurea in Fisica

A.A. 1998/99

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Esempi di osservazioni ad alta risoluzione	2
1.2	Organizzazione del lavoro	2
1.3	Telescopi analizzati	3
2	L'immagine telescopica	4
2.1	Ottica di Fourier	5
2.1.1	Principio di HUYGENS-FRESNEL-KIRCHHOFF	5
2.1.2	Approssimazione di FRAUNHOFER	6
2.1.3	Validità dell'approssimazione di FRAUNHOFER	8
2.2	Formazione dell'immagine	9
2.2.1	Criteri per la qualità dell'immagine	14
2.2.2	Caso discreto	15
2.3	Ottica statistica	17
2.3.1	Coerenza ottica	17
2.3.2	Teorema di ZERNICKE-VAN CITTER	18
2.3.3	Interferometria e formazione dell'immagine	20
2.4	Il rumore nei ricettori	20
2.4.1	Modello semi-classico	21
2.4.2	Rumore additivo	22
2.4.3	Processo Poissoniano doppiamente stocastico	22
2.4.4	Il rumore nei ricettori CCD	22
3	Il seeing atmosferico	24
3.1	Descrizione di un mezzo turbolento	24
3.1.1	La funzione di struttura	25
3.2	Fluttuazioni dell'indice di rifrazione	25
3.2.1	Espressione di $C_n^2(z)$	26
3.3	L'ipotesi di TAYLOR	27
3.4	Modello a strati	28
3.5	Approssimazione di <i>near field</i>	28
3.5.1	Scintillazione atmosferica	29
3.6	Proprietà statistiche	30

3.7	Simulazione del seeing	31
3.7.1	Calcolo della PSF	32
3.7.2	Generazione dell'immagine	33
3.7.3	Simulazione del rumore	33
3.8	Simulazione dello strato di turbolenza	34
3.8.1	Metodi di simulazione	34
3.8.2	Simulazione zonale tramite FFT	35
3.8.3	Simulazione zonale tramite serie di FOURIER	37
4	Studio del <i>seeing</i> atmosferico	38
4.1	Modello dello strumento astronomico	38
4.2	Modello della sorgente astronomica	39
4.2.1	Oggetto <i>artificiale</i>	39
4.2.2	Oggetto <i>naturale</i>	39
4.3	Modello di turbolenza atmosferica	39
4.4	Statistica dello schermo di fase	42
4.4.1	Determinazione statistica della funzione di struttura	44
4.5	Proprietà della PSF	47
4.5.1	Profili della PSF	47
4.5.2	Movimento del centroide della PSF	54
4.5.3	<i>Boiling time</i> delle speckles	57
4.5.4	Campo di isoplanatismo della PSF	58
4.5.5	Forma della PSF per esposizioni brevi	61
4.6	Proprietà dell'immagine	65
4.7	Riepilogo del lavoro svolto	68
5	Tecniche di recupero a PSF nota	69
5.1	Metodi per ricavare la PSF	70
5.1.1	Stelle di riferimento naturali	70
5.1.2	Stelle di riferimento artificiali	70
5.1.3	Cenni all'ottica adattiva	71
5.2	Metodi di deconvoluzione classici	73
5.2.1	Deconvoluzione lineare: metodo di FOURIER-WIENER	74
5.2.2	Deconvoluzione non lineare: metodo di RICHARDSON-LUCY	86
5.3	Riepilogo del lavoro svolto	89
6	Tecniche di recupero SAA	90
6.1	Descrizione	90
6.2	Risultati	91
6.2.1	GREENWOOD, SNR Infinito	91
6.2.2	GREENWOOD, Magnitudine 7	94
6.2.3	GREENWOOD, Magnitudine 11	97
6.2.4	SLC-N, Magnitudine 9	97

6.2.5	Conclusioni	99
6.3	Eliminazione del halo SAA	100
6.4	Discussione del SNR	101
6.5	Discussione delle funzioni di sharpness	102
6.6	Riepilogo del lavoro svolto	106
7	Tecniche di <i>speckle interferometry</i>	107
7.1	<i>Speckle interferometry</i>	107
7.1.1	Effetti del rumore	108
7.1.2	Risultati delle simulazioni	109
7.1.3	Risultati osservativi	113
7.1.4	Riepilogo del lavoro svolto	115
7.2	Cenni di <i>speckle-imaging</i>	115
8	Conclusioni	119
A	Normalizzazione delle subarmoniche	122
A.1	Descrizione del metodo	122
A.2	Risultati	123
B	Software utilizzato	126
B.1	Generazione dello schermo di fase tramite FFT	126
B.2	Generazione dello schermo di fase tramite serie di FOURIER	127
B.3	Programmi di simulazione in PDL	128
B.3.1	Oggetti e funzioni realizzati	128
B.3.2	Esempi di simulazioni	131
B.4	Ringraziamenti informatici	135

Capitolo 1

Introduzione

Nonostante l'aumento del diametro delle pupille dei telescopi e i continui miglioramenti della qualità delle ottiche e dei ricettori, le osservazioni astronomiche condotte sulla Terra soffrono inevitabilmente del degrado dovuto alla presenza dell'atmosfera. La turbolenza presente negli strati più densi di questa (fino ad un'altezza di circa 20 km) provoca una fluttuazione casuale del cammino ottico, così che l'immagine a breve tempo di esposizione assume una forma "a macchie", da cui il nome inglese *speckles*.

L'integrazione di molte realizzazioni della turbolenza, necessaria per aumentare il rapporto segnale su rumore visto l'esiguo numero di fotoni provenienti dalle sorgenti celesti, dà luogo ad una perdita delle componenti ad alta frequenza spaziale presenti nell'immagine. Il risultato netto è che il limite nella risoluzione dei telescopi terrestri è di circa 1 secondo d'arco indipendentemente dal diametro del telescopio (purchè maggiore di alcune decine di centimetri, come nella moderna astronomia) su lunghi tempi di esposizione. Tale effetto viene detto *seeing*.

Storicamente questo effetto è stato già messo in evidenza da NEWTON. Costui ha correttamente identificato l'agitazione atmosferica come limite alla risoluzione dei telescopi e inoltre ha attribuito a questa il tremolio delle stelle osservate a occhio nudo. NEWTON dà come ricetta per migliorare la risoluzione dell'immagine l'effettuare le osservazioni in alta montagna, dove l'aria è più quieta. Di fatto questo è stato, fino a tempi assai recenti, l'unico mezzo a disposizione degli astronomi per migliorare le qualità delle proprie osservazioni. La situazione cominciò a mutare negli anni 50, quando lo sviluppo di pellicole abbastanza sensibili ha permesso l'acquisizione di immagini a breve tempo di esposizione, nelle quali era visibile la forma a macchie che lasciava intuire la possibilità di recuperare le alte frequenze spaziali. In pratica i primi sistemi di correzione dei seeing sono stati sviluppati dai militari al fine di migliorare la capacità di *tracking* di bersagli nemici. I primi utilizzi in astronomia risalgono agli anni 80, mentre i sistemi di recupero dal seeing sono ora diventati un accessorio standard dei telescopi

moderni.

Dal punto di vista della comprensione teorica il primo passo è stato lo sviluppo da parte di KOLMOGOROV di una teoria della turbolenza negli anni 40. Il primo ad applicare questa teoria al problema della propagazione di un'onda in un fluido turbolento è stato TATARSKI. Un altro contributo fondamentale è stato quello dato da FRIED, che ha studiato l'effetto dell'atmosfera mediante lo sviluppo in polinomi di ZERNIKE e ha introdotto un importante parametro, la lunghezza di coerenza.

1.1 Esempi di osservazioni ad alta risoluzione

Le osservazioni che beneficiano dell'alta risoluzione spaziale sono molteplici. In primo luogo citiamo la problematica dell'osservazione delle stelle doppie e multiple strette. Essendo queste composte da più oggetti puntiformi ed avendo un ampio campo di magnitudini apparenti, si prestano particolarmente bene all'utilizzo di tecniche di osservazione ad alta risoluzione, analizzate in seguito. L'importanza astrofisica di tali osservazioni è evidente: ad esempio sono notevoli le indicazioni che la grande maggioranza delle stelle della Galassia fanno parte di sistemi multipli. Restando nell'ambito di oggetti stellari, un altro campo di ricerca molto interessante è l'individuazione di eventuali pianeti facenti parte di altri sistemi solari. Qui la situazione è aggravata dalla differenza di luminosità tra la stella e i pianeti.

Nel nostro Sistema Solare sono di particolare interesse i corpi minori, ovvero gli asteroidi. Non avendo questi problemi di bassa luminosità e presentando un ampio campionario di forme sono molto interessanti come banco di prova delle metodologie di osservazione ad alta risoluzione. Un altro oggetto molto studiato con queste tecniche è la superficie solare. È superfluo dire che questa non presenta problemi di luminosità, in compenso l'atmosfera terrestre è molto più turbolenta di giorno e quindi la necessità di sistemi di correzione è più pressante.

Un campo più complicato è quello degli oggetti estesi. Questi presentano una maggiore difficoltà visto il basso contrasto delle loro componenti (in opposizione agli oggetti dominati da componenti puntiformi, ovvero *point-source dominated*). Normalmente gli oggetti di interesse astrofisico hanno anche magnitudini assai elevate. La ricerca di metodologie di recupero della risoluzione si è comunque indirizzata verso gli oggetti compatti, come i resti di supernove e il centro galattico.

1.2 Organizzazione del lavoro

Nell'immagine integrata su un lungo tempo di esposizione le alte frequenze spaziali sono irrimediabilmente perse, quindi se vogliamo compensare l'effetto atmosferico dobbiamo lavorare sulle immagini a breve tempo di espo-

sizione. A questo punto è necessario conoscere la modalità secondo la quale l'immagine iniziale, che può essere quantificata, ad esempio, mediante la *Point Spread Function* (PSF) viene alterata. Nel capitolo 2 vengono discussi i principi e le tecniche utilizzate per simulare la formazione dell'immagine telescopica, mentre il capitolo 3 le specializza al caso della formazione dell'immagine attraverso un mezzo turbolento. La simulazione è necessaria vista la fluttuazione aleatoria notevolmente complessa del cammino ottico, che non permette una caratterizzazione analitica dei parametri dell'immagine che ci interessano. I risultati del *software* di simulazione utilizzato (descritto in appendice B) vengono presentati e validati nel capitolo 4.

Nel caso che la PSF del sistema ottica più atmosfera sia nota, possiamo applicare le tecniche di deconvoluzione standard per rimuovere l'effetto del seeing. Di questo e della possibilità di misurare la PSF del sistema si occupa il capitolo 5. Se non abbiamo a disposizione informazioni osservative aggiuntive oltre alle immagini a breve tempo di esposizione dell'oggetto osservato il problema del recupero dell'immagine iniziale diventa notevolmente più complicato. Nel capitolo 6 viene discussa la tecnica *Shift and Add Analysis* (SAA), che permette un parziale recupero dell'immagine originale. Infine nel capitolo 7 vengono presentate le tecniche di *speckle interferometry* applicate al caso di osservazioni di stelle doppie. Il capitolo si conclude con alcune osservazioni effettuate al Telescopio Nazionale Galileo. Queste sono state messe a disposizione dal DR. ROBERTO RAGAZZONI dell'Osservatorio Astronomico di Padova, che ringrazio vivamente.

1.3 Telescopi analizzati

I programmi sviluppati sono adatti a simulare pupille che vanno dai 40 cm agli 8 metri. In questo lavoro ci concentreremo su pupille del diametro di 1.8 e 3.5 metri, allo scopo di analizzare l'efficienza dei sistemi di osservazione ad alta definizione per telescopi di diametro limitato. I costi associati a tali aperture sono estremamente bassi se paragonati a quelli legati all'utilizzo di diametri maggiori o all'utilizzo di telescopi orbitanti. Il ricettore simulato è la camera CCD funzionante in modo analogico. Grazie allo sviluppo della tecnologia dei CCD l'efficienza quantica di tali strumenti è ormai prossima all'unità. Inoltre questi strumenti presentano le caratteristiche di alta velocità di acquisizione necessarie per le osservazioni ad alta definizione.

Capitolo 2

L'immagine telescopica

La propagazione della luce è stata spiegata durante i secoli ricorrendo a diverse impostazioni teoriche. Una classificazione approssimativa di queste, in ordine di generalità crescente, potrebbe essere la seguente:

Ottica geometrica. La luce si propaga lungo raggi; questi sono determinati dal principio di FERMAT.

Ottica scalare. La luce è vista come onda scalare, la cui evoluzione è dettata dal principio di HUYGENS-FRESNEL-KIRCHHOFF.

Ottica elettromagnetica. La propagazione della luce viene inquadrata nella teoria più generale delle equazioni di MAXWELL.

Ottica fotonica. Si basa sui concetti della meccanica quantistica ed in particolare sulla quantizzazione del campo elettromagnetico in unità discrete dette fotoni.

In astronomia l'ottica geometrica viene utilizzata in fase di progettazione delle ottiche, ovvero nello studio delle aberrazioni di queste. Questa è la cosiddetta tecnica del *ray-tracing*. L'ottica elettromagnetica viene usata assai di rado, ad esempio quando si studia la polarizzazione della luce o le caratteristiche fisiche (riflessività, trasmittività) del mezzo.

Per quanto riguarda gli obiettivi di questo lavoro, l'impostazione più utile è quella derivante dalla teoria scalare della luce, che porta alla cosiddetta ottica di FOURIER. Alcune importanti proprietà derivanti dalla natura fotonica della luce verranno introdotte mediante il modello semi-classico della ricezione tramite rivelatori fotoelettrici.

2.1 Ottica di Fourier

2.1.1 Principio di Huygens-Fresnel-Kirchhoff

Nell'ottica scalare possiamo rappresentare la propagazione della luce mediante un campo scalare, che –nel caso monocromatico con frequenza ν_0 – si può scrivere riferendosi al punto P e al tempo t come:

$$u(P, t) = A(P) \cos(2\pi\nu_0 t - \phi(P)) \quad (2.1)$$

dove $A(p)$ è l'ampiezza dell'onda luminosa nel punto P . Se passiamo alla rappresentazione complessa dell'onda abbiamo

$$\begin{aligned} U(P, t) &= A(P) e^{-i(2\pi\nu_0 t - \phi(P))} \\ &= \Psi(P) e^{-i2\pi\nu_0 t} \end{aligned} \quad (2.2)$$

dove $\Psi(P) = A(P) e^{i\phi(P)}$ è detta ampiezza complessa. In questo caso lo spettro del segnale luminoso è

$$\hat{U}(P, \nu) = \Psi(P) \delta(\nu - \nu_0) \quad (2.3)$$

Generalizzando al caso di segnale luminoso di contenuto spettrale arbitrario $\hat{U}(P, \nu)$ possiamo scrivere l'onda luminosa come

$$U(P, t) = 2 \int_0^\infty \hat{U}(P, \nu) e^{-i2\pi\nu t} d\nu \quad (2.4)$$

Un caso importante è quello di segnale con banda spettrale $\Delta\nu$ piccola rispetto alla frequenza media ν_0 , ovvero per il quale $\Delta\nu \ll \nu_0$. Questo segnale può essere rappresentato come

$$U(P, t) = \Psi(P, t) e^{-i2\pi\nu_0 t} \quad (2.5)$$

dove $\Psi(P, t)$ varia lentamente nel tempo rispetto a ν_0 . È importante notare che l'ampiezza complessa così definita varia con la stessa legge –che ora andremo a definire– dell'ampiezza istantanea.

Il principio di HUYGENS-FRESNEL-KIRCHHOFF (brevemente principio HFK) afferma che nella propagazione della luce ogni punto del fronte d'onda si può vedere come origine di una nuova onda sferica. Per semplicità assumiamo la geometria di figura 2.1, nella quale un fronte d'onda incide su un'apertura W –detta anche pupilla– di forma data.

Detta $\Psi(M)$ l'ampiezza del campo scalare che rappresenta l'onda luminosa nel piano della pupilla \widehat{XY} , possiamo calcolare $\Psi(P)$ nel piano di osservazione \widehat{xy} usando il principio di HFK:

$$d\Psi(P) = \Psi(M) K(\chi) \frac{e^{iks}}{s} dW \quad (2.6)$$

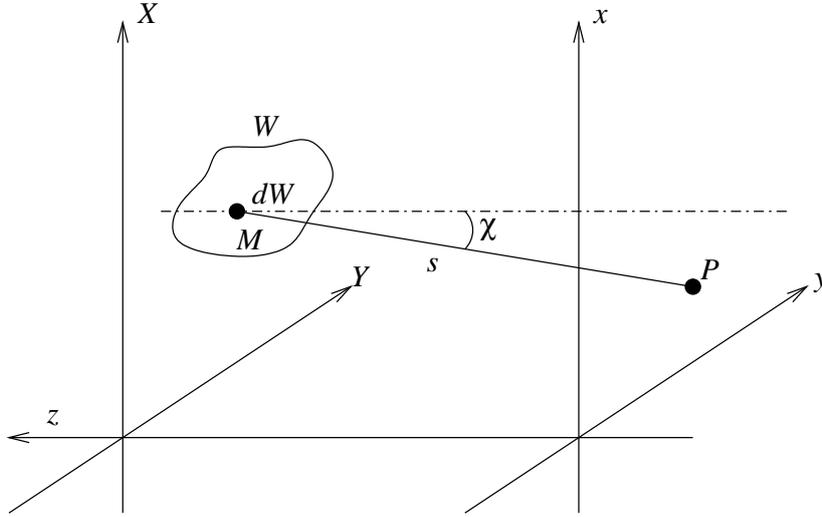


Figura 2.1: Illustrazione del principio di HUYGENS-FRESNEL-KIRCHHOFF

In questa espressione s è la distanza tra P e M , $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ il numero d'onda dell'onda luminosa, λ la lunghezza d'onda di questa e $K(\chi)$ una funzione che tiene conto del fatto che le onde secondarie *non* si propagano in modo isotropo. Nella costruzione di FRESNEL si ha $K(\chi) = \frac{1}{i\lambda} \cos(\chi)$. Integrando su tutta l'apertura W , dato che il campo all'esterno di questa è nullo, otteniamo

$$\Psi(P) = \iint_W \Psi(M) K(\chi) \frac{e^{iks}}{s} dW \quad (2.7)$$

Nel caso che l'apertura sia di dimensioni trascurabili rispetto alla distanza tra i 2 piani possiamo porre $\cos(\chi) \approx 1$ e nel denominatore dell'integrando $s \approx z$. Otteniamo quindi

$$\Psi(P) = \frac{1}{i\lambda z} \iint_W \Psi(M) e^{iks} dW \quad (2.8)$$

2.1.2 Approssimazione di Fraunhofer

Passiamo ora ad occuparci dell'espressione di s . Dalla geometria del sistema vediamo che

$$s = z \sqrt{1 + \left(\frac{x-X}{z}\right)^2 + \left(\frac{y-Y}{z}\right)^2} \quad (2.9)$$

dove x, y sono le coordinate del punto P , mentre X, Y sono quelle di M . Questa espressione può essere notevolmente semplificata mediante le seguenti approssimazioni.

- Supponendo¹ che $x^2 + y^2 \ll z^2$ possiamo fermarci al primo ordine nello sviluppo della radice quadrata nella 2.9, ottenendo

$$\begin{aligned} s &\approx z + \frac{((x - X)^2 + (y - Y)^2)}{2z} \\ &\approx z + \frac{(x^2 + y^2)^2}{2z} - \frac{xX + yY}{z} + \frac{(X^2 + Y^2)^2}{2z} \end{aligned} \quad (2.10)$$

L'espressione di $\Psi(x, y)$ che si ottiene con questa forma di s è detta formula di diffrazione di FRESNEL.

- Se $X^2 + Y^2 \ll \frac{2z}{k} = \frac{\lambda z}{\pi}$, l'ultimo termine della 2.10 può essere trascurato. Questa condizione equivale a dire che le variazioni di fase dell'onda secondaria dovute alle dimensioni della pupilla d'entrata sono piccole. L'espressione per s è

$$s \approx z + \frac{(x^2 + y^2)^2}{2z} - \frac{xX + yY}{z} \quad (2.11)$$

Siamo ora nel caso della diffrazione di FRAUNHOFER o anche diffrazione all'infinito.

Ponendo la 2.11 nella 2.8 otteniamo:

$$\Psi(x, y) = \frac{e^{ikz} e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)^2}}{i\lambda z} \iint_W \Psi(X, Y) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda z}(xX+yY)} dX dY \quad (2.12)$$

Al posto delle coordinate x e y del piano di osservazione adottiamo i coseni direttori del raggio diffratto u e v . Con le ipotesi di approssimazione introdotte si ha che $(u, v) = (\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$. Inoltre applichiamo anche il seguente cambio di coordinate: $(U, V) = (\frac{X}{\lambda}, \frac{Y}{\lambda})$.

Estendiamo quindi l'integrale all'intero piano della pupilla, moltiplicando l'integrando per la funzione $W(X, Y)$, che vale 1 per i punti all'interno dell'apertura e 0 altrove. Otteniamo quindi l'importante risultato

$$\Psi(u, v) \propto \iint W(U, V) \Psi(U, V) e^{-2\pi i(uU+vV)} dU dV \quad (2.13)$$

Quindi l'ampiezza dell'onda luminosa nel piano osservativo (detta figura di diffrazione) è proporzionale alla trasformata di FOURIER del prodotto tra l'ampiezza dell'onda incidente e la funzione caratteristica della pupilla. È sufficiente considerare la proporzionalità per 2 motivi:

1. Tra poco passeremo dall'ampiezza all'intensità e in questo caso i termini esponenziali fuori dall'integrale della 2.12 spariscono visto che sono di modulo unitario. Quindi l'unica dipendenza dell'intensità dell'onda nel piano osservativo da u e v si trova nella parte sotto integrale.

¹La condizione $X^2 + Y^2 \ll z^2$ è implicita nell'aver supposto l'apertura di dimensioni trascurabili rispetto a z .

2. Il principio di HFK non permette comunque il calcolo dell'energia totale incidente sul piano osservativo, ma solo dell'intensità relativa delle varie parti della figura di diffrazione. Come vedremo di seguito questo non è un problema visto che in pratica si opera con funzioni opportunamente normalizzate.

2.1.3 Validità dell'approssimazione di Fraunhofer

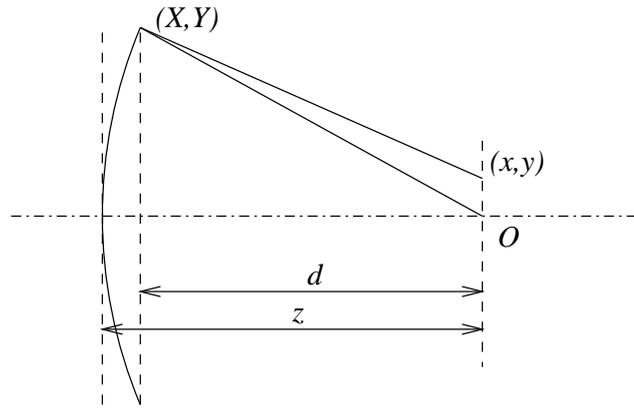


Figura 2.2: Geometria per il calcolo della figura di diffrazione nel caso di onda sferica

Se inseriamo nella condizione per la validità dell'approssimazione di FRAUNHOFER i valori tipici per i telescopi che stiamo analizzando, $D = 1$ m e $\lambda = 555$ nm, otteniamo che z deve essere maggiore di 5×10^6 m. Questo mostra l'inapplicabilità pratica della condizione di FRAUNHOFER nel caso di onda piana incidente.

Le condizioni sono diverse nel caso di onda focalizzata. In questo caso la geometria del sistema è rappresentata in figura 2.2: l'onda sferica col centro di curvatura nel fuoco O incide sull'apertura W . In questo caso l'espressione per la distanza ottica s diventa

$$\begin{aligned}
 s &= \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + d^2} \\
 &= \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + x^2 - X^2 - Y^2} \\
 &= \sqrt{z^2 + (x - X)^2 + (y - Y)^2} \\
 &\approx z + \frac{(x^2 + y^2)^2}{2z} - \frac{xX + yY}{z}
 \end{aligned}$$

e quindi l'espressione di s è la stessa che nel caso di FRAUNHOFER.

2.2 Formazione dell'immagine

Passiamo ora al problema della formazione dell'immagine tramite un sistema ottico. Per questo utilizziamo il punto di vista esposto in [9], sintetizzato nei seguenti presupposti:

- Supponiamo che la propagazione della luce all'interno del sistema ottico sia limitata da un unico diaframma, la pupilla W .
- A parte gli effetti di diffrazione della pupilla, la propagazione della luce può essere trattata con l'ottica geometrica e quindi la progettazione del nostro sistema può essere considerata corretta in termini di questa.
- La pupilla d'uscita è geometricamente coniugata a quella d'entrata, così che possiamo prendere una qualunque di queste due per caratterizzare il sistema ottico.
- Supponiamo che l'ingrandimento geometrico sia unitario. In caso contrario applicheremo l'ingrandimento del sistema come fattore di scala all'immagine formata dal sistema ottico.

Nella figura 2.3 è rappresentata la geometria del sistema. È importante notare le coordinate usate in ciascuno dei tre piani: piano dell'oggetto $\widehat{u_0v_0}$, piano dell'immagine $\widehat{u_1v_1}$ e piano della pupilla \widehat{uv} (per quanto detto sopra non serve distinguere tra pupilla d'entrata e di uscita, visto che –nella nostra approssimazione– la seconda è l'immagine, nel senso geometrico, della prima). Le coordinate usate sono definite nella sezione 2.1.1.

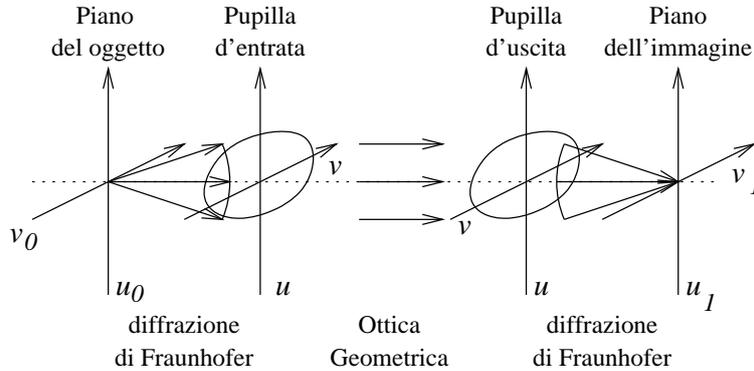


Figura 2.3: Modello utilizzato nello studio della formazione dell'immagine nell'ottica di FOURIER

Applichiamo ora la formula di diffrazione di FRAUNHOFER, tenendo conto della direzione di propagazione, nel caso monocromatico. Otteniamo quindi

$$\Psi_1(u_1, v_1) = \iint h(u_1 - u_0, v_1 - v_0) \Psi_0(u_0, v_0) du_0 dv_0 \quad (2.14)$$

dove $\Psi_1(u_1, v_1)$ è l'ampiezza dell'immagine formata dal sistema ottico, mentre $\Psi_0(u_0, v_0)$ è quella dell'oggetto e $h(u_1 - u_0, v_1 - v_0)$ è definito come

$$h(u_1 - u_0, v_1 - v_0) = \iint P(U, V) e^{-2\pi i((u_1 - u_0)U + (v_1 - v_0)V)} dx dy \quad (2.15)$$

Dove $P(U, V)$ è la cosiddetta funzione di pupilla generalizzata (*Generalized Pupil Function*):

$$P(U, V) = \begin{cases} \Psi(U, V) & \text{all'interno di } W \\ 0 & \text{all'esterno di } W \end{cases} \quad (2.16)$$

$h(u, v)$ è la risposta del sistema all'impulso, come si verifica agevolmente sostituendo a $\Psi(u_0, v_0)$ la funzione δ di DIRAC. Quest'osservazione è molto importante, dato che ci permetterà di usare i concetti dalla *teoria dei sistemi lineari* nel seguito. Notiamo anche che nell'approssimazione $h(u, v)$ risulta spazio-invariante. Purtroppo nella pratica questo non accade per colpa delle aberrazioni, come il coma, che non possiedono questa qualità. Il campo per il quale la risposta del sistema può considerarsi spazio-invariante è detto campo di isoplanatismo. L'espressione 2.14 può essere agevolmente generalizzata nel caso quasi-monocromatico:

$$\Psi_1(u_1, v_1, t) = \iint h(u_1 - u_0, v_1 - v_0) \Psi_0(u_0, v_0, t) du_0 dv_0 \quad (2.17)$$

I sensori ottici sono comunque sensibili all'intensità² del campo incidente $I(u, v, t) = \overline{\Psi_1(u, v, t) \Psi_1^*(u, v, t)}$, dove con la barretta indichiamo la media effettuata in un tempo T grande rispetto al periodo dell'oscillazione elettromagnetica v_0^{-1} ma piccolo rispetto al tempo scala delle variazioni dell'ampiezza complessa. Nel caso di sistema ottico con risposta spazio-invariante l'intensità diventa

$$I(u_1, v_1, t) = \frac{\iiint h(u_1 - u'_0, v_1 - v'_0) h(u_1 - u''_0, v_1 - v''_0) \overline{\Psi_0(u'_0, v'_0, t) \Psi_0^*(u''_0, v''_0, t)} du'_0 dv'_0 du''_0 dv''_0}{\Psi_0(u'_0, v'_0, t) \Psi_0^*(u''_0, v''_0, t)} \quad (2.18)$$

L'espressione della media temporale assume forme diverse a seconda delle caratteristiche di coerenza dell'onda luminosa emessa dall'oggetto osservato.

Luce coerente

In questo campo l'ampiezza complessa della luce emessa dall'oggetto nelle direzioni u'_0, v'_0 e u''_0, v''_0 è completamente correlata³, quindi

$$\overline{\Psi_0(u'_0, v'_0, t) \Psi_0^*(u''_0, v''_0, t)} = \Psi_0(u'_0, v'_0, t) \Psi_0^*(u''_0, v''_0, t) \quad (2.19)$$

²Per la precisione bisognerebbe parlare di irradianza, ma il termine più comune è intensità.

³Ovvero l'una può essere ricavata dall'altra mediante una moltiplicazione con un numero complesso costante nel tempo.

Questo ci permette di fattorizzare l'integrale 2.18 ottenendo

$$I^C(u_1, v_1, t) = \left| \Psi_1^C(u_0, v_0, t) \right|^2 \quad (2.20)$$

$$\Psi_1^C(u_1, v_1, t) = \iint h(u_1 - u_0, v_1 - v_0) \Psi_0(u_0, v_0, t) du_0 dv_0 \quad (2.21)$$

L'equazione 2.21 può essere scritta in forma di convoluzione

$$\Psi_1^C(u, v) = h(u, v) * \Psi_0(u, v) \quad (2.22)$$

dove sono stati omessi gli indici per semplicità. Applicando la trasformata di FOURIER ad ambo i lati e utilizzando il teorema di convoluzione otteniamo (da ora in poi indicheremo con la tilde la funzione trasformata e la variabili coniugate, ad esempio $\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \mathcal{F}[f(x, y)] = \iint f(x, y) e^{-2\pi i(\tilde{x}x + \tilde{y}y)} dx dy$)

$$\widetilde{\Psi_1^C}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \tilde{h}(\tilde{u}, \tilde{v}) * \tilde{\Psi}_0(\tilde{u}, \tilde{v}) \quad (2.23)$$

$\tilde{h}(\tilde{u}, \tilde{v})$ è detta *Coherent Transfer Function* e, utilizzando la formula 2.15 può essere espressa come

$$\tilde{h}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \mathcal{F}[\mathcal{F}[P(\tilde{u}, \tilde{v})]] = P(-\tilde{u}, -\tilde{v}) \quad (2.24)$$

Luce incoerente

Questo è il caso comune in astronomia. La relazione tra le ampiezze complesse della luce emessa dall'oggetto osservato è

$$\overline{\Psi_0(u'_0, v'_0, t) \Psi_0^*(u''_0, v''_0, t)} = \delta(u'_0 - u''_0, v'_0 - v''_0) O(u'_0, v'_0, t)$$

Utilizzando questa espressione nella 2.17 otteniamo

$$I(u_1, v_1, t) = \iint |h(u_1 - u_0, v_1 - v_0)|^2 O(u_0, v_0, t) du_0 dv_0 \quad (2.25)$$

dove $I(u_1, v_1, t)$ è l'intensità dell'immagine formata e $O(u_0, v_0, t)$ è l'intensità della luce emessa dall'oggetto. La funzione $h(u, v)$ è detta *Point Spread Function*. Quando la utilizziamo per calcolare la risposta del sistema è utile normalizzarla al proprio integrale in modo da conservare l'irradianza:

$$\mathcal{T}(u, v) = \frac{|h(u, v)|^2}{\iint |h(u', v')|^2 du' dv'} \quad (2.26)$$

Alternativamente la PSF può essere normalizzata al proprio valore massimo, cosa assai conveniente quando compariamo la risposta di diversi sistemi ottici:

$$\mathcal{T}(u, v) = \frac{|h(u, v)|^2}{|h(0, 0)|^2} \quad (2.27)$$

Possiamo ora esprimere la relazione tra immagine e oggetto mediante una convoluzione

$$I(u, v) = \mathcal{T}(u, v) * O(u, v) \quad (2.28)$$

Anche in questo caso possiamo passare alle trasformate delle quantità in gioco ottenendo

$$\tilde{I}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \tilde{\mathcal{T}}(\tilde{u}, \tilde{v}) * \tilde{O}(\tilde{u}, \tilde{v}) \quad (2.29)$$

In questo caso la funzione di trasferimento $\tilde{\mathcal{T}}$ è l'autocorrelazione della pupilla, come dimostrano i seguenti passaggi, che usano il teorema dell'autocorrelazione. Per semplicità tralasciamo la normalizzazione, che può essere comodamente effettuata a posteriori.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{T}} &= \mathcal{F}[hh^*] \\ &= \mathcal{F}[\mathcal{F}[P]\mathcal{F}[P]^*] \\ &= P \star P \end{aligned} \quad (2.30)$$

Un'altra funzione utile è la cosiddetta *Optical Transfer Function*, definita come la funzione di trasferimento normalizzata alla frequenza spaziale 0, 0:

$$\mathcal{H}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \frac{\tilde{\mathcal{T}}(\tilde{u}, \tilde{v})}{\tilde{\mathcal{T}}(0, 0)} \quad (2.31)$$

Vediamo ora un caso di interesse astronomico: una pupilla circolare di diametro D . La funzione di pupilla è, in questo caso, definita come:

$$P(U, V) = \begin{cases} 1 & \text{per } U^2 + V^2 \leq \frac{D^2}{\lambda^2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.32)$$

In questo caso si può sfruttare la simmetria circolare del problema. Utilizzando la trasformata di FOURIER-BESSEL otteniamo la PSF (normalizzata al valore massimo):

$$\mathcal{T}(u) = \left(\frac{2J_1\left(\frac{\pi Du}{\lambda}\right)}{\frac{\pi Du}{\lambda}} \right)^2 \quad (2.33)$$

dove λ è la lunghezza d'onda della luce. In figura 2.4 sono riportate le PSF per i diametri della pupille di cui ci interesseremo in seguito. o

Utilizzando l'espressione 2.31 possiamo calcolare l'OTF nel caso di pupilla di diametro D . Definendo la frequenza angolare normalizzata come $\nu_n = \frac{\tilde{u}\lambda}{D}$ abbiamo la seguente espressione per l'OTF:

$$\mathcal{H}(\nu_n) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left(\arccos \nu_n - \nu_n \sqrt{1 - \nu_n^2} \right) & \text{se } \nu_n \leq 1 \\ 0 & \text{se } \nu_n > 1 \end{cases} \quad (2.34)$$

In figura 2.5 sono riportati i grafici delle OTF nei casi di cui ci interesseremo in seguito.

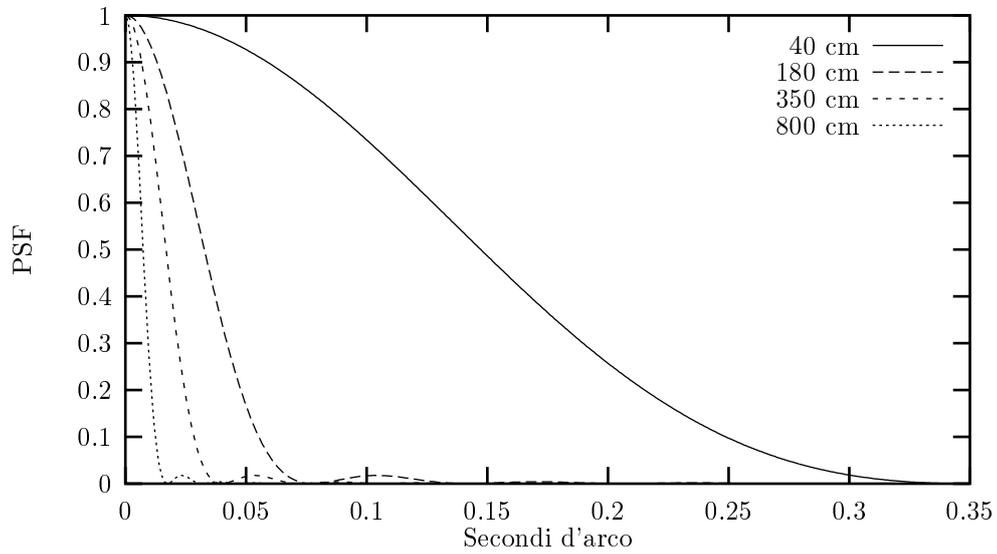


Figura 2.4: PSF per pupille telescopiche da 40 cm a 8 m. La lunghezza d'onda utilizzata nel calcolo è 555 nm, corrispondente alla banda V

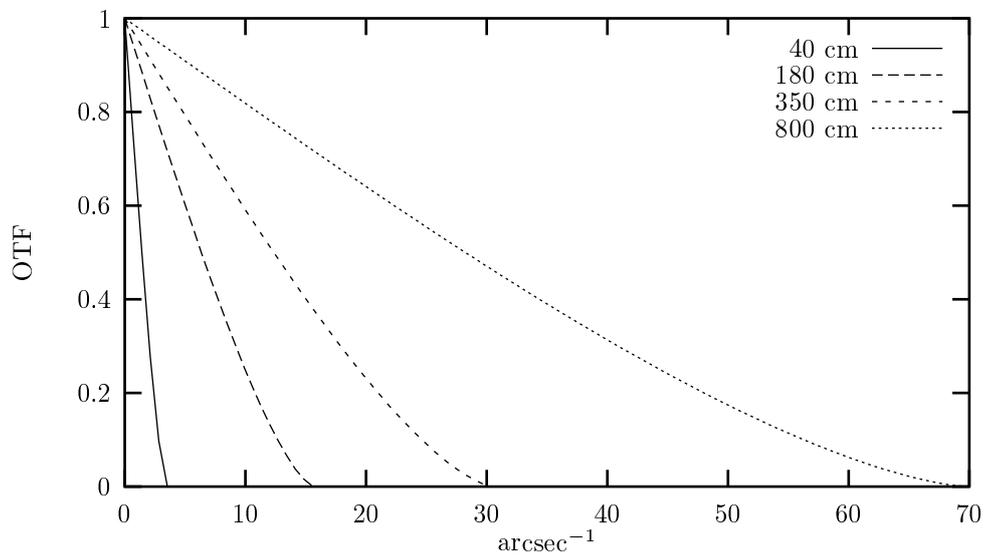


Figura 2.5: OTF per pupille telescopiche da 40 cm a 8 m. La lunghezza d'onda utilizzata nel calcolo è 555 nm, corrispondente alla banda V

2.2.1 Criteri per la qualità dell'immagine

Nel caso ideale la GPF assume un valore unitario per i punti interni alla pupilla e 0 per quelli esterni. Se il sistema ottico è affetto da aberrazione questo non è più vero, dato che le componenti della luce dell'oggetto passanti a diverse distanze radiali dall'asse⁴ dell'ottico e/o provenienti da angoli diversi rispetto a questo sono sfasate una volta giunte al fuoco. Di questo si può tenere conto rappresentando la pupilla mediante un numero complesso $e^{i\phi(U,V,u,v)}$, dove $\phi(U, V, u, v)$ tiene conto dello sfasamento del fronte d'onda per diverse distanze radiali $R^2 = U^2 + V^2$ e angoli di incidenza u, v . Notiamo che in questo caso il sistema non è più spazio-invariante e quindi l'analisi si complica notevolmente (vedi [30]). Non è obbiettivo di questo lavoro trattare questi aspetti, ma approfondiamo brevemente alcuni concetti usati in questo campo, visto che anche l'effetto del seeing può essere schematizzato mediante una GPF complessa.

In queste condizioni l'OTF non è più un numero reale e per caratterizzare la risposta del sistema si usa la *Modulation Transfer Function*, definita come il modulo della OTF:

$$\mathcal{M}(\tilde{u}, \tilde{v}) = |\mathcal{H}(\tilde{u}, \tilde{v})| \quad (2.35)$$

A volte è utile caratterizzare la risposta del sistema mediante un solo numero. Un modo per fare ciò è l'intensità di STHREL, definita come

$$\mathcal{R} = \left| \iint \mathcal{H}(\tilde{u}, \tilde{v}) d\tilde{u} d\tilde{v} \right| \quad (2.36)$$

Si può dimostrare che questa assume il valore massimo nel caso di sistema ottico perfetto. Inoltre notiamo che l'intensità di STHREL gioca nell'ottica di FOURIER lo stesso ruolo della larghezza di banda nell'elettronica.

Funzioni di *sharpness*

L'intensità di STHREL non è in pratica adatta a caratterizzare la qualità dell'immagine per 2 motivi:

- Dà risultati insoddisfacenti in presenza di rumore, dato che non distingue le componenti spettrali di questo da quelle del segnale.
- Richiede di passare dal dominio dei dati a quello delle frequenze e quindi rappresenta un certo aggravio computazionale.

Per ovviare a questi problemi sono state inventate una serie di funzioni, dette di *sharpness*, (vedi [20]) che caratterizzano la risposta del sistema ottico mediante un singolo numero⁵ e sono facilmente calcolabili nel dominio dei

⁴Se si suppone che il sistema ottico sia a simmetria radiale; in caso contrario la dipendenza è più complicata.

⁵Per ciò vengono anche riferite col nome ONMF: *One Number Merit Function*.

dati. Nelle seguenti espressioni gli integrali vanno riferiti a tutta l'immagine, che è centrata sul punto $(0, 0)$:

$$S_1 = \iint I^2(x, y) dx dy \quad (2.37)$$

$$S_2 = \begin{cases} \iint I(x, y) dx dy & \text{se } \sqrt{x^2 + y^2} \leq 0.25 \text{ arcsec} \\ 0 & \text{se } \sqrt{x^2 + y^2} > 0.25 \text{ arcsec} \end{cases} \quad (2.38)$$

$$S_3 = \iint I^4(x, y) dx dy \quad (2.39)$$

$$S_4 = - \iint I(x, y) (x^2 + y^2) dx dy \quad (2.40)$$

$$S_5 = - \iint I(x, y) \log I(x, y) dx dy \quad (2.41)$$

$$S_6 = \frac{\iint I^2(x, y) dx dy (\iint I(x, y) dx dy)^2}{2.25 \pi \left(\iint \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} I(x, y) dx dy \right)^2} \quad (2.42)$$

dove x_c e y_c sono le coordinate del centroide

Il problema delle funzioni di sharpness è che dipendono pesantemente dal tipo di oggetto osservato e sono quindi inadatte a definire in modo preciso la risposta del sistema atmosfera-telsecopio.

2.2.2 Caso discreto

Fino ad ora abbiamo lavorato con funzioni continue per rappresentare l'intensità dell'immagine e le caratteristiche del sistema ottico. Se vogliamo usare un calcolatore digitale per studiare i nostri sistemi dobbiamo passare ad una rappresentazione discreta, che viene brevemente presentata in questa sezione.

Le funzioni mono-dimensionali e bi-dimensionali vengono rappresentate rispettivamente mediante vettori e matrici di numeri reali. Gli elementi di queste strutture rappresentano i valori delle rispettive funzioni continue campionate su una griglia di passo uniforme Δ . Chiaramente il numero massimo di campioni è legato alla disponibilità di memoria dell'elaboratore e ai tempi di elaborazione. Esemplichiamo il caso della rappresentazione di una funzione mono-dimensionale $f(x)$ con una griglia di n elementi, passo Δ , origine in (x_0) :

$$f_i = f(x_0 + i\Delta) \quad i = 0 \dots (n - 1) \quad (2.43)$$

L'estensione al caso bidimensionale è ovvia. Notiamo le seguenti proprietà del campionamento:

1. La maggiore frequenza rappresentabile è $f_N = \frac{1}{2\Delta}$, detta frequenza di NYQUIST. Questo risultato va sotto il nome di *teorema del campionamento*.

2. La minore frequenza rappresentabile è $f_0 = Nf_N = \frac{1}{2N\Delta}$.

Le operazioni di addizione e moltiplicazione si estendono in modo naturale al caso discreto se utilizziamo la stessa griglia di campionamento per le funzioni in gioco. Un discorso a parte va fatto per quanto riguarda la trasformata di FOURIER. Questa viene sostituita dalla *trasformata discreta di Fourier* (DFT), definita nel caso mono-dimensionale come:

$$\tilde{f}_m = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-2\pi i \frac{nm}{N}} \quad (2.44)$$

In questa espressione \tilde{f}_m per m tra 0 e $N/2$ è l'ampiezza complessa della componente spettrale a frequenza $\frac{m}{2N\Delta}$, mentre \tilde{f}_m per m tra $N/2+1$ e $N-1$ è l'ampiezza complessa della componente spettrale a frequenza $-\frac{N-m}{2N\Delta}$. La relativa antitrasformata è

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{f}_m e^{2\pi i \frac{nm}{N}} \quad (2.45)$$

Inoltre notiamo che lo stimatore $P(\tilde{f}_m)$ della potenza spettrale alla frequenza $\frac{m}{2N\Delta}$ dove m varia tra 0 e $\frac{N}{2}$ (vedi [21] per un'esposizione precisa) può essere espresso come:

$$\begin{aligned} P(\tilde{f}_0) &= \frac{1}{N^2} |\tilde{f}_0|^2 \\ P(\tilde{f}_m) &= \frac{1}{N^2} \left(|\tilde{f}_m|^2 + |\tilde{f}_{N-m}|^2 \right) \\ P(\tilde{f}_N) &= \frac{1}{N^2} |\tilde{f}_N|^2 \end{aligned} \quad (2.46)$$

In pratica si utilizza un particolare algoritmo per il calcolo della DFT, detto *Trasformata di Fourier Veloce* (FFT), descritto in [21] e [17]. Il vantaggio di quest'ultimo è di avere un tempo di esecuzione proporzionale a $N \log N$, dove N è il numero di elementi presenti nel vettore, mentre nel caso della DFT il tempo di calcolo è proporzionale a N^2 .

Come si vede dall'equazione 2.44 la DFT presuppone delle condizioni al contorno periodiche. Questo è particolarmente fastidioso nel caso in cui vogliamo realizzare l'operazione convoluzione o correlazione in forma discreta, dato che i valori del segmento iniziale del vettore su cui stiamo operando influenzerebbero quelli del segmento finale. In questo caso è necessario aggiungere al vettore su cui stiamo eseguendo la convoluzione un numero di valori nulli uguale alla lunghezza del vettore convolvente. Questi valori possono essere aggiunti indifferentemente alla fine o all'inizio, o in parte qua ed in parte là, fintantochè il loro numero rimane invariato.

Lo stesso discorso va fatto nel caso dell'autocorrelazione, la quale viene usata nel calcolo della PSF. Se indichiamo con n le dimensioni del supporto (quindi rappresentiamo il nostro sistema con una matrice $n \times n$) e con

m il diametro, in pixel, della pupilla (quindi dei valori diversi da zero nel supporto) otteniamo la condizione:

$$m < \frac{n}{2} \quad (2.47)$$

2.3 Ottica statistica

Dato che stiamo studiando la formazione dell'immagine attraverso un mezzo turbolento, dobbiamo utilizzare un metodo statistico per poter prevedere almeno i valori medi di certe quantità caratterizzanti il nostro sistema. In questa sezione verranno quindi introdotti i concetti di ottica statistica, dei quali si farà uso in seguito.

Definiamo innanzi tutto la correlazione spazio-temporale $\Gamma_u(\vec{x}, t; \vec{x}', t')$ della funzione $u(\vec{x}, t)$:

$$\Gamma_u(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = \langle u(\vec{x}, t) u^*(\vec{x}', t') \rangle \quad (2.48)$$

dove con le parentesi $\langle \cdot \rangle$ si intende la media su un *ensemble* di realizzazioni della funzione $u(\vec{x}, t)$. Nel caso in cui il processo stocastico rappresentato da $u(\vec{x}, t)$ è ergodico, la media sull'ensemble può essere sostituita con la media temporale:

$$\Gamma_u(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = \overline{u(\vec{x}, t) u^*(\vec{x}', t')} \quad (2.49)$$

Nei casi pratici con cui avremmo a che fare l'assunzione di ergodicità è di norma giustificata.

2.3.1 Coerenza ottica

Vediamo ora com'è possibile scrivere l'intensità luminosa in funzione della correlazione nel caso di interferenza di un'onda luminosa. Supponiamo che un sistema ottico (ad esempio un interferometro) produca uno spostamento laterale $\Delta\vec{x}$ e temporale Δt del fascio incidente e lo faccia interferire con la versione originale. Possiamo quindi esprimere l'intensità nel punto di interferenza come:

$$\begin{aligned} I(\vec{x}) &= \overline{(u(\vec{x}, t) + u(\vec{x} + \Delta\vec{x}, t + \Delta t))^2} \\ &= \Gamma_u(\vec{x}, t; \vec{x}, t) + \Gamma_u(\vec{x} + \Delta\vec{x}, t + \Delta t; \vec{x} + \Delta\vec{x}, t + \Delta t) + \\ &\quad \Gamma_u(\vec{x}, t; \vec{x} + \Delta\vec{x}, t + \Delta t) + \Gamma_u(\vec{x} + \Delta\vec{x}, t + \Delta t; \vec{x}, t) \end{aligned} \quad (2.50)$$

Notiamo a questo punto che un processo stocastico ergodico è anche stazionario, quindi la correlazione per un tale processo è tempo-invariante:

$$\Gamma_u(\vec{x}, t; \vec{x} + \Delta\vec{x}, t + \Delta t) \equiv \Gamma_u(\vec{x}, \vec{x} + \Delta\vec{x}, \Delta t)$$

Utilizzando tale proprietà possiamo infine esprimere l'intensità come

$$I(\vec{x}) = I_u(\vec{x}) + I_u(\vec{x} + \Delta\vec{x}) + 2 \Re [\Gamma_u(\vec{x}, \vec{x} + \Delta\vec{x}, \Delta t)] \quad (2.51)$$

Questo dimostra l'importanza del concetto di correlazione. Dal punto di vista fisico questa quantità rappresenta le qualità di *coerenza* della radiazione luminosa. Abbiamo già visto nella sezione 2 i casi particolari di radiazione completamente coerente e completamente incoerente. Per semplicità distinguiamo tra *coerenza temporale* e *coerenza spaziale*.

- La coerenza temporale è misurata negli esperimenti in cui il fascio di luce è separato in due componenti e una componente viene ritardata variandone il percorso ottico. Uno strumento che serve a tale scopo è l'interferometro di MICHELSON. Il valore di $\Gamma(\tau)$ viene valutato misurando una qualche osservabile che dipende da esso, ad esempio la visibilità delle frange. A questo punto un'utile caratterizzazione della radiazione è il tempo di coerenza t_c :

$$t_c = \int \left| \frac{\Gamma(\tau)}{\Gamma(0)} \right|^2 d\tau \quad (2.52)$$

- La coerenza spaziale viene misurata, ad esempio, campionando il fascio incidente mediante due fori e ricavando dalla figura di interferenza che ne deriva il valore di $\Gamma(x, x + \Delta x)$ (per semplicità ci siamo limitati al caso mono-dimensionale). Questo è il caso dell'esperimento di YOUNG. Definiamo infine la lunghezza di coerenza l_c :

$$l_c = \int \left| \frac{\Gamma(x, x + \Delta x)}{\Gamma(x, x)} \right|^2 d\Delta x \quad (2.53)$$

2.3.2 Teorema di Zernicke-Van Citter

Vediamo ora un importante sviluppo del concetto di coerenza, il quale ha una grande importanza concettuale e pratica nell'ottica statistica. Il teorema di ZERNICKE-VAN CITTER serve a determinare la variazione delle caratteristiche di coerenza dell'onda luminosa durante la sua propagazione. Quanto di seguito si applica al caso di onda quasi-monocromatica.

La geometria del sistema è fissata in figura 2.6. Utilizzando le formule per la propagazione dell'onda luminosa presentate nella sezione 2.1.1 otteniamo l'equazione

$$\Gamma_I(\vec{X}_1, \vec{X}_2) = \frac{1}{\lambda} \iint \Gamma_O(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \frac{e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}}{r_1 r_2} \cos \theta_1 \cos \theta_2 d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 \quad (2.54)$$

Semplifichiamo quest'espressione utilizzando le seguenti considerazioni:

- In astronomia abbiamo a che fare con sorgenti che emettono luce incoerente, quindi

$$\Gamma_O(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = O(\vec{x}_1) \delta(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \quad (2.55)$$

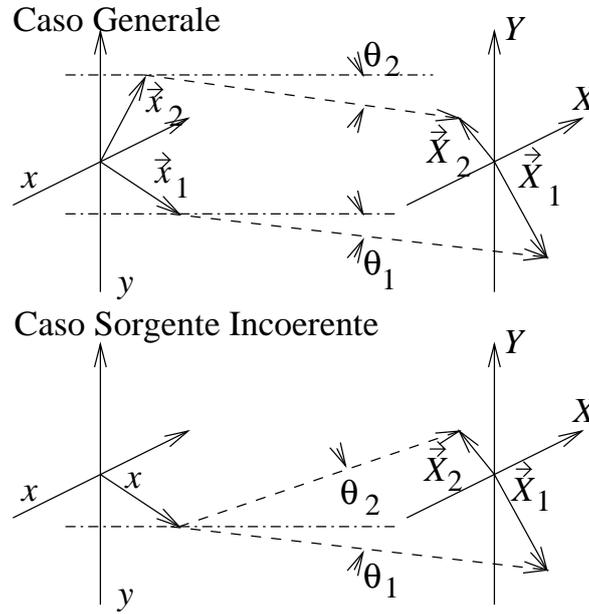


Figura 2.6: Geometria utilizzata nell'annuncio del teorema di ZERNICKE-VAN CITTER. \widehat{xy} è il piano della sorgente, mentre \widehat{XY} è il piano di formazione dell'immagine.

- Se la distanza tra i 2 piani è molto maggiore delle dimensioni dell'immagine in entrata e uscita possiamo utilizzare l'approssimazione di onda parabolica (sostituiamo \vec{x} a \vec{x}_1):

$$r_1 \simeq z + \frac{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}{2z}$$

$$r_2 \simeq z + \frac{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2}{2z}$$

- Nelle stesse condizioni anche il coseno può essere approssimato all'unità.

Sotto queste condizioni la correlazione nel piano dell'osservatore può essere scritta come

$$\begin{aligned} \Gamma_I(\vec{X}_1, \vec{X}_2) &= \frac{e^{-j\psi}}{(\lambda z)^2} \iint O(\vec{x}) e^{-j\frac{2\pi}{\lambda z} \vec{x} \cdot (\vec{X}_2 - \vec{X}_1)} d\vec{x} \\ &= \frac{e^{-j\psi}}{(\lambda z)^2} \mathcal{F}[O(\vec{x})]_{\vec{f} = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{\lambda z}} \end{aligned} \quad (2.56)$$

e ϕ è un fase data dall'espressione:

$$\phi = \frac{\pi}{\lambda z} (|\vec{x}_2|^2 - |\vec{x}_1|^2) \quad (2.57)$$

Questo termine si annulla nel fuoco di un sistema ottico.

2.3.3 Interferometria e formazione dell'immagine

Riprendiamo l'espressione 2.18, scrivendola in termini della correlazione:

$$I(u_1, v_1, t) = \iint \iint h(u_1 - u'_0, v_1 - v'_0) h(u_1 - u''_0, v_1 - v''_0) \Gamma_{\Psi_0}((u'_0, v'_0), (u''_0, v''_0)) du'_0 dv'_0 du''_0 dv''_0 \quad (2.58)$$

Abbiamo visto i casi particolari di luce coerente e incoerente, descriviamo ora qualitativamente cosa accade nel caso intermedio, dato che è quello che capita in pratica nel caso di osservazioni sub-atmosfera. Supponiamo di avere una pupilla di diametro D illuminata da una radiazione con lunghezza di coerenza $l_c < D$. In questo caso possiamo pensare la nostra pupilla suddivisa in sotto-pupille di diametro l_c . Queste, in prima approssimazione, possono intendersi come parti di un interferometro e l'immagine finale è il risultato dell'interferenza delle immagini prodotte da queste.

Lo stesso concetto può essere espresso in termini di frequenze spaziali presenti nell'immagine. Riprendiamo senza dimostrazione (vedi [36]) la seguente espressione, dove $W(\vec{x})$ è la funzione di pupilla generalizzata, $\Gamma_u(\lambda\vec{f})$ è la funzione di correlazione dell'onda in entrata e $\vec{f} = (\tilde{u}, \tilde{v})$:

$$I(\vec{f}) = \Gamma_u(\lambda\vec{f}) \int W(\vec{x}) W(\vec{x} - \lambda\vec{f}) d\vec{x} \quad (2.59)$$

Quest'equazione vale nel fuoco di un sistema ottico ad ingrandimento unitario e nel caso che l'onda in entrata sia incoerente; in base a questo è stato possibile scrivere la correlazione in dipendenza della distanza solamente. L'interpretazione di quest'equazione è la seguente: ogni coppia di punti della pupilla ad una distanza $\lambda\vec{f}$ contribuisce alla formazione di una frangia sinusoidale, mentre l'intensità di questa è modulata dalla correlazione a questa distanza.

2.4 Il rumore nei ricettori

Un fattore importante di cui tenere conto quando vogliamo simulare l'acquisizione di immagini astronomiche è la composizione corpuscolare della luce. Una trattazione rigorosa del problema richiederebbe un approccio quantistico, ma per gli scopi di questo lavoro è sufficiente l'approccio *semi-classico*. Questo è strutturato in 2 fasi:

1. La propagazione della luce è trattata in modo classico.
2. L'aspetto corpuscolare è introdotto solo nel momento dell'interazione radiazione-ricettore.

Nella sezione 3.7.3 vedremo com'è possibile simulare gli effetti della quantizzazione della luce per una singola immagine. Di seguito saranno invece trattate le proprietà statistiche derivanti dalla modellazione semi-classica dell'interazione radiazione-ricettore.

2.4.1 Modello semi-classico

Supponiamo una radiazione monocromatica incidente sul ricettore di frequenza ν , un'area di raccolta infinitesima dA , un'efficienza quantica η e un flusso⁶ incidente $F(\vec{x}, t)$. Il numero di fotoni che interagisce col ricettore in un tempo T è

$$\bar{K} = \frac{\eta dA}{h\nu} \int_t^{t+T} F(t') dt' \quad (2.60)$$

Nella regione visibile l'interazione può essere modellata mediante un processo stocastico *Poissoniano*. Le caratteristiche di questo sono:

1. \bar{K} è costante nel tempo.
2. La probabilità di avere K iterazioni in un'area finita A è

$$P(K, A) = \frac{\bar{K}^K(A) e^{-\bar{K}(A)}}{K!} \quad (2.61)$$

3. Il numero di eventi in regioni non sovrapposte è statisticamente indipendente.

Senza indugiare nella dimostrazione, la quale può essere trovata in [36], riportiamo il valore d'aspettativa e il rapporto segnale-rumore (SNR) sotto queste condizioni, espressi in funzione della frequenza spaziale⁷ \vec{f} :

$$\langle I(\vec{f}) \rangle = \bar{K} \frac{O(\vec{f})}{O(\vec{0})} \mathcal{H}(\vec{f}) \quad (2.62)$$

$$\text{SNR}_I(\vec{f}) = \bar{K}^{\frac{1}{2}} \left| \frac{O(\vec{f})}{O(\vec{0})} \mathcal{H}(\vec{f}) \right| \quad (2.63)$$

Nella seconda delle 2 espressioni è da notare la dipendenza del rapporto segnale-rumore da $\bar{K}^{\frac{1}{2}}$ tipica del rumore Poissoniano.

⁶Ovvero la potenza per unità di area della radiazione.

⁷Riprendendo la notazione usata precedentemente $\vec{f} = (\tilde{u}, \tilde{v})$.

2.4.2 Rumore additivo

Parecchi rivelatori, tra i quali anche i CCD come vedremo in seguito, richiedono per una corretta modellizzazione la presenza di un rumore di tipo additivo. Questo può essere rappresentato mediante una variabile aleatoria $n_A(\vec{x})$, dove \vec{x} sono le coordinate del singolo elemento del ricettore (*pixel*). Supponiamo le seguenti proprietà di $n_A(\vec{x})$:

1. La media del rumore è 0, quindi $\langle n_A(\vec{x}) \rangle = 0$.
2. Il rumore additivo è spazialmente scorrelato, quindi $\langle n_A(\vec{x})n_A(\vec{y}) \rangle = 0$ se $\vec{x} \neq \vec{y}$.
3. n_A è completamente descritta dalla propria varianza σ_A^2 .
4. n_A è statisticamente indipendente dal rumore Poissoniano (quindi da K).

Sotto queste condizioni il valore di aspettativa rimane inalterato, mentre il SNR può essere espresso mediante l'espressione

$$\text{SNR}_I(\vec{f}) = \frac{\bar{K}}{\sqrt{\bar{K} + P\sigma_A^2}} \left| \frac{O(\vec{f})}{O(\vec{0})} \mathcal{H}(\vec{f}) \right| \quad (2.64)$$

dove P è il numero di pixel che compongono l'immagine.

2.4.3 Processo Poissoniano doppiamente stocastico

Nel caso in cui \mathcal{H} non sia costante nel tempo, ma anch'essa sia descritta da un processo stocastico, il formalismo da applicare è più complicato, dato che \bar{K} non può essere assunta costante nel tempo. Chiamiamo $\bar{\mathcal{H}}(\vec{f})$ il valore di aspettativa per l'OTF e $\sigma_{\mathcal{H}}^2(\vec{f})$ la sua varianza. L'espressione per il valore di aspettativa e per il rapporto segnale-rumore è

$$\langle I(\vec{f}) \rangle = \bar{K} O_n(\vec{f}) \bar{\mathcal{H}}(\vec{f}) \quad (2.65)$$

$$\text{SNR}_I(\vec{f}) = \frac{\bar{K} O_n(\vec{f}) \bar{\mathcal{H}}(\vec{f})}{\sqrt{\bar{K} + P\sigma_A^2 + \bar{K}^2 |O_n(\vec{f})|^2 \sigma_{\mathcal{H}}^2(\vec{f})}} \quad (2.66)$$

dove $O_n(\vec{f}) = \frac{O(\vec{f})}{O(\vec{0})}$.

2.4.4 Il rumore nei ricettori CCD

Vediamo ora le principali fonti di rumore nei ricettori a stato solido ad accoppiamento di carica (*Charge Coupled Device* – CCD), la loro importanza e distribuzione statistica (vedi [12]).

Photon Shot Noise. È intrinsecamente dovuto alla natura fotonica della luce incidente sul rivelatore. Ha distribuzione Poissoniana e rappresenta la principale fonte di rumore nei CCD.

Dark Current Shot Noise. Deriva dalla quantizzazione della corrente di buio. Ha distribuzione Poissoniana ma non è molto importante nei rivelatori usati in astronomia, dato che questi sono adeguatamente raffreddati.

Fixed Pattern Noise. Rappresenta la non uniformità dei pixel (dovuta a difetti di costruzione) rilevabile anche in assenza di illuminazione.

Photon Response Nonuniformity. È simile alla precedente ma riguarda le caratteristiche di non omogeneità della risposta dei vari pixel. Entrambe sono piccole nei CCD di alta qualità usate in astronomia.

Reset Noise. Nasce nella circuiteria di reset del condensatore di lettura del CCD. Può essere resa piccola con opportuni accorgimenti circuitali.

On-Chip Noise. Trae origine nella circuiteria di amplificazione integrata nel CCD. Include rumore Gaussiano e rumore con spettro $1/f$, con il primo generalmente preponderante.

Off-Chip Noise. È simile al precedente ma riguarda l'amplificatore esterno. Generalmente è meno importante visto che vengono impiegati adeguati amplificatori a basso rumore.

Quantization Noise. Nasce dalla finitezza della parola usata per rappresentare il dato del singolo pixel.

Se vogliamo adeguatamente rappresentare i CCD usati in astronomia operanti in modo analogico basta considerare solo alcune tra le fonti di rumore citate sopra. Questo è dovuto alla qualità delle CCD ad uso scientifico, che rende ininfluenti la maggior parte delle fonti di rumore citate sopra. Il modello deve quindi includere:

- Lo *shot noise* con distribuzione Poissoniana.
- Il rumore di lettura, approssimabile come Poissoniano, che ammonta a circa 1-10 elettroni per lettura.
- Il rumore termico, anch'esso Poissoniano, pari a circa 1-10 elettroni al secondo per pixel.

Capitolo 3

Il seeing atmosferico

Ai fini dello studio dell'immagine in osservazioni sub-atmosfera è conveniente pensare questa come un fluido composto da bolle di diversa temperatura e pressione e quindi di diverso indice di rifrazione n . Un fluido diventa turbolento quando il numero di REYNOLDS $R_e = \frac{v_0 L_0}{\nu_0}$ supera un certo valore critico, che dipende dalle caratteristiche geometriche del flusso. Per valori tipici dell'atmosfera Terrestre, ovvero velocità caratteristica $v_0 = 1$ m/s, lunghezza caratteristica $L_0 = 15$ m e viscosità cinematica $\nu_0 = 15 \times 10^{-6}$ m²/s si ha $R_e = 10^6$ che in generale corrisponde ad un regime turbolento. Allora si applica la teoria di KOLMOGOROV che descrive il trasferimento di energia cinetica dai movimenti a grande scala a quelli a piccola scala.

3.1 Descrizione di un mezzo turbolento

In questa sede si riprenderanno brevemente i risultati teorici riguardanti le caratteristiche di un mezzo turbolento. La trattazione è basata su [28] e [36]. Il mezzo è supposto omogeneo e isotropo, mentre il trasferimento di energia a varie scale avviene in maniera inerziale. La teoria di KOLMOGOROV prevede una distribuzione spettrale dell'energia del tipo

$$\mathcal{P}_E^K(\vec{k}) \propto |\vec{k}|^{-\frac{11}{3}} \quad (3.1)$$

dove \vec{k} è il vettore d'onda ($k = \frac{2\pi}{l}$). Questa legge è valida in un dato campo di valori della lunghezza caratteristica l . Il limite inferiore è dato dalla *lunghezza di scala interna* l_0 ; per moti con scala caratteristica inferiore l'energia viene dissipata in modo termico. Il limite superiore L_0 , detto *lunghezza di scala esterna* definisce la lunghezza di scala al di sopra della quale il fenomeno non può più considerarsi omogeneo e isotropo, dato che intervengono moti complessivi delle masse d'aria. Il valore di l_0 è dell'ordine dei millimetri, mentre le misure di L_0 , anche se più inaffidabili, indicano un valore di qualche decina di metri (vedi [3]). Tenendo conto di quanto detto

si introduce la distribuzione spettrale di VON KARMAN:

$$\mathcal{P}_E^V(\vec{k}) \propto \frac{e^{-\frac{k^2}{k_m^2}}}{\left(|\vec{k}|^2 + k_0^2\right)^{\frac{11}{6}}} \quad (3.2)$$

In questa espressione $k_0 = \frac{2\pi}{L_0}$ e $k_m = \frac{2\pi}{l_0}$. Oltre al modellare in maniera più adeguata il fenomeno fisico, questa espressione ha il vantaggio di eliminare il polo nell'origine dell'espressione 3.1. In pratica, per la dipendenza $\propto k^{-\frac{11}{3}}$ l'energia presente per grandi valori di k è comunque bassa e quindi il termine esponenziale può essere omesso, ottenendo così la relazione

$$\mathcal{P}_E^K(\vec{k}) \propto \left(|\vec{k}|^2 + k_0\right)^{-\frac{11}{6}} \quad (3.3)$$

3.1.1 La funzione di struttura

Come già accennato l'espressione 3.1 presenta un polo nell'origine che ne impedisce l'integrazione nello spazio reciproco. Indichiamo con \mathcal{F}_E la fluttuazione di energia $\mathcal{F}_E = E - \langle E \rangle$. La covarianza di questa grandezza è definita come

$$\mathcal{C}_E(\vec{r}) = \langle \mathcal{F}_E(\vec{r} + \vec{\rho}) \mathcal{F}_E(\vec{\rho}) \rangle \quad (3.4)$$

e può essere calcolata mediante il teorema di WIENER-KHINCHINE:

$$\mathcal{C}_E(\vec{r}) = \int \mathcal{P}_E(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{k} \quad (3.5)$$

Purtroppo nel caso di statistica di KOLMOGOROV questa quantità diverge e quindi si introduce la *funzione di struttura* \mathcal{D}_E :

$$\mathcal{D}_E(\vec{r}) = \left\langle |\mathcal{F}_E(\vec{r} + \vec{\rho}) - \mathcal{F}_E(\vec{\rho})|^2 \right\rangle \quad (3.6)$$

che è legata alla covarianza tramite la

$$\mathcal{D}_E(\vec{r}) = 2 \left(\mathcal{C}_E(\vec{0}) - \mathcal{C}_E(\vec{r}) \right) \quad (3.7)$$

La stessa procedura può essere seguita per altre grandezze fisiche. In seguito analizzeremo le caratteristiche statistiche dell'indice di rifrazione n e della fase del fronte d'onda ϕ .

3.2 Fluttuazioni dell'indice di diffrazione n

Anche lo spettro di potenza delle fluttuazioni di temperatura e pressione ha la stessa dipendenza da k dell'energia. Questo è importante soprattutto

per la pressione, visto che per la banda ottica la fluttuazione dell'indice di rifrazione può essere espressa come

$$\mathcal{F}_n = \frac{77.6 P}{T} \times 10^{-6} \quad (3.8)$$

Utilizzando questo risultato possiamo scrivere lo spettro delle fluttuazioni di n come

$$\mathcal{P}_n^V(k) = \frac{0.033 C_n^2(z)}{(k^2 + k_0^2)^{\frac{11}{6}}} \quad (3.9)$$

In questa espressione $C_n^2(z)$ rappresenta la forza della fluttuazione in funzione della distanza dell'osservatore z . In questa espressione (e nelle seguenti) utilizziamo k al posto di $|\vec{k}|$ per brevità.

Nel caso di KOLMOGOROV la 3.9 diventa

$$\mathcal{P}_n^K(k) = 0.033 C_n^2(z) k^{-\frac{11}{3}} \quad (3.10)$$

con relativa funzione di struttura (ricavata dalla 3.7)

$$\mathcal{D}_n^K(\vec{r}) = C_n^2(z) r^{\frac{2}{3}} \quad (3.11)$$

3.2.1 Espressione di $C_n^2(z)$

Qui di seguito sono riportati alcuni modelli che danno un'espressione esplicita di $C_n^2(h)$. Il loro grafico è riportato in figura 3.1. h è l'altezza riferita all'osservatore e corrisponde al cammino ottico nel caso di osservazione zenitale. Nel caso di osservazione ad un angolo zenitale θ_z il cammino ottico diventa

$$z = \frac{h}{\cos \theta_z} \quad (3.12)$$

Nelle espressioni seguenti h è espresso in metri.

Hufnagel-Valley (HV)

Il profilo di turbolenza (HV21) viene espresso nella forma

$$\begin{aligned} C_n^2(h) = & 5.94 \times 10^{-53} \left(\frac{v}{27} \right)^2 h^{10} e^{-\frac{h}{1000}} \\ & + 2.7 \times 10^{-16} e^{-\frac{h}{1500}} + A e^{-\frac{h}{100}} \end{aligned} \quad (3.13)$$

dove A rappresenta la forza della turbolenza a livello del mare (valore tipico $1.7 \times 10^{-14} \text{m}^{-\frac{2}{3}}$ e v è la velocità dei venti ad alta quota (valore tipico 21m/s. Una versione adatta al caso notturno (HV54) è

$$\begin{aligned} C_n^2(h) = & 8.16 \times 10^{-54} h^{10} e^{-\frac{h}{1000}} + 3.02 \times 10^{-17} e^{-\frac{h}{1500}} \\ & + 1.90 \times 10^{-15} e^{-\frac{h}{100}} \end{aligned} \quad (3.14)$$

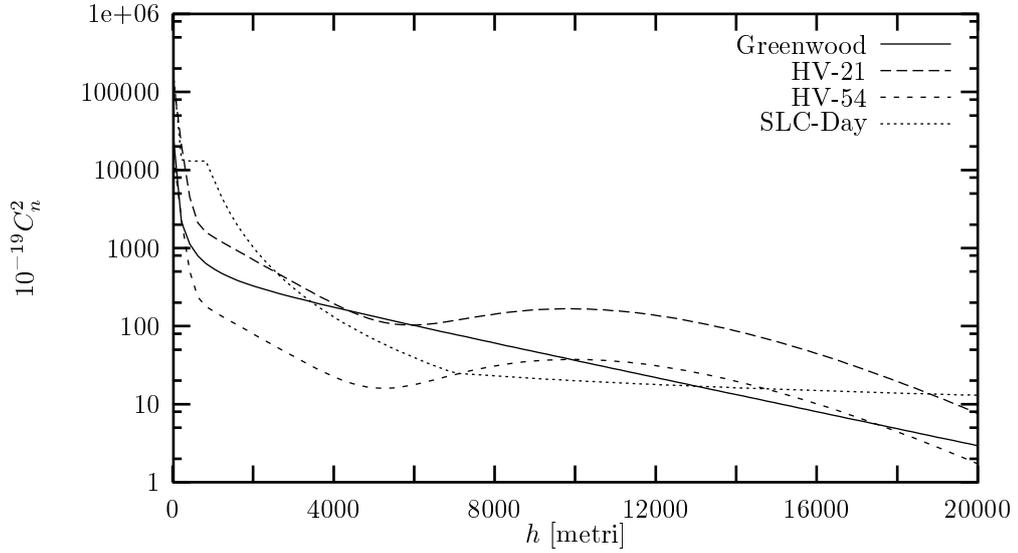


Figura 3.1: L'intensità della turbolenza in funzione dell'altezza

Submarine Laser Communication (SLC)

Anche in questo caso si distingue tra modello diurno e modello notturno. L'espressione esplicita è

$$C_n^2(h) = \begin{cases} 0 & 0 \leq h < 19 \\ 4.008 \times 10^{-13} h^{-1.054} & 19 \leq h < 230 \\ 1.300 \times 10^{-15} & 230 \leq h < 850 \\ 6.352 \times 10^{-7} h^{-2.966} & 850 \leq h < 7000 \\ 6.209 \times 10^{-16} h^{-0.6229} & 7000 \leq h < 20000 \end{cases} \quad (3.15)$$

Greenwood

Questo modello è particolarmente adatto nel caso di osservazione astronomica in un sito con un buon *seeing*. L'espressione esplicita è

$$C_n^2(h) = \left(2.2 \times 10^{-13} (h + 10)^{-1.3} + 4.3 \times 10^{-17} \right) \times e^{-\frac{h}{4000}} \quad (3.16)$$

3.3 L'ipotesi di Taylor

Nello studio delle aberrazioni indotte dall'atmosfera si suppone che, per brevi periodi temporali, le fluttuazioni dell'indice di rifrazioni rimangano costanti nel tempo a meno di una traslazione a velocità trasversale costante. Questa è la cosiddetta ipotesi di TAYLOR della turbolenza congelata.

Matematicamente possiamo esprimere quest'ipotesi nel seguente modo:

$$n(\vec{r}, t_2) = n(\vec{r} - \vec{v}(t_2 - t_1), t_1) \quad (3.17)$$

L'ipotesi di TAYLOR può essere applicata in modo rigoroso su tempi inferiori al cosiddetto *tempo scala a lungo periodo* della turbolenza atmosferica, che rappresenta il tempo di vita di una certa configurazione dell'atmosfera.

3.4 Modello a strati della turbolenza atmosferica

Per semplificare lo studio degli effetti della turbolenza atmosferica sull'immagine è conveniente pensare che gli effetti di questa siano concentrati in strati sottili. Per ogni strato bisogna fissare l'altezza, lo spessore e il valore medio dell'intensità della turbolenza ($C_{n,i}^2$). In virtù dell'ipotesi di Taylor ognuno di questi strati ha una data velocità e direzione di movimento. I valori di spessore dello strato e di $C_{n,1}^2$ vengono fissati in modo tale da essere consistenti col modello scelto di $C_n^2(z)$ continuo. In particolare si può imporre che i primi m momenti dei N strati scelti coincidano nei due casi, ovvero

$$\int_0^L z^m C_n^2(z) dz = \sum_{i=0}^4 z_i^m C_{m,i}^2 \Delta z_i \quad (3.18)$$

Normalmente bastano 4 strati per una modellizzazione adeguata del fenomeno. In tabella 3.1 vengono riportati 5 possibili modelli a strati che descrivono la turbolenza atmosferica. Nella tabella I_C indica la turbolenza totale, cioè il momento di ordine 0 della 3.18, mentre W_i è il peso dello strato i -esimo

$$W_i = \frac{C_{n,i}^2 \Delta z_i}{I_C} \quad (3.19)$$

dove z_i è l'altezza dello strato e Δz_i il suo spessore. In seguito verranno utilizzati i modelli di GREENWOOD e SLC-N dato che sono più adatti alla modellizzazione del seeing astronomico.

3.5 Approssimazione di *near field*

Quando la radiazione luminosa attraversa uno strato di turbolenza sia l'ampiezza dell'onda che la fase di questa vengono alterate. Da un punto di vista dell'ottica geometrica possiamo dire che la direzione dei singoli raggi luminosi viene alterata. Questo è il caso più generale di distorsione del fronte d'onda indotto dalla turbolenza e va sotto il nome di *far field turbulence*.

Un'utile approssimazione è quella di *near field*, nella quale supponiamo che solo la fase dell'onda luminosa sia modificata e non l'ampiezza di questa. Con questa ipotesi la fase dell'onda dopo aver percorso uno spessore di atmosfera Δz con base ad un'altezza z_i e un indice di rifrazione $n(\vec{x}, z)$

	W_1 (200 m)	W_2 (2 km)	W_3 (10 km)	W_4 (18 km)	I_C $\text{m}^{\frac{1}{3}}$
GREENWOOD	0.8615	0.0980	0.0394	0.0011	1.078
SLC-N	0.4965	0.4623	0.0299	0.0113	0.687
SLC-D	0.7397	0.2513	0.0048	0.0042	2.220
HV21	0.8902	0.0443	0.0591	0.0064	2.233
HV54	0.6877	0.0204	0.2554	0.0365	2.953

Tabella 3.1: In questa tabella sono presentati i pesi W_i per 5 diversi modelli a 4 strati. Per ogni strato è indicata anche l'altezza, mentre per ogni modello sono presenti anche i valori della turbolenza totale.

(ricordiamo che possiamo scrivere l'onda luminosa come $u(\vec{x}) = e^{i\phi(\vec{x})}$, dove è inteso un vettore bidimensionale e si è supposta l'ampiezza dell'onda unitaria) è

$$\phi(\vec{x}) = \frac{2\pi}{\lambda} \int_{z_i}^{z_i+\Delta z} n(\vec{x}, z) dz \quad (3.20)$$

La direzione di propagazione viene assunta invariata quindi la fase così trovata è quella che viene raccolta dalla pupilla del telescopio, ovvero il campo sulla pupilla può essere espresso come

$$u_p(\vec{x}) = e^{j\phi(\vec{x})} \quad (3.21)$$

Quest'espressione ci permette di calcolare la GPF e di passare, mediante la 2.30 alla PSF e, infine, con l'uso dell'espressione 2.28 di ricavare l'immagine generata dal sistema atmosfera+telescopio per un dato oggetto astronomico.

Una derivazione più formale del problema della formazione dell'immagine basata sul teorema di ZERNIKE-VAN CITTER verrà data nella sezione 4.5.1. A questo punto è stata preferita questa derivazione dato che, oltre a essere più intuitiva, si presta ad una diretta realizzazione di un simulatore di seeing.

3.5.1 Scintillazione atmosferica

Utilizzando l'approssimazione di near field perdiamo la componente temporale della distorsione indotta dall'atmosfera, detta *scintillazione*. Il risultato della scintillazione è una fluttuazione aleatoria della trasmittanza dell'atmosfera τ_A . La distribuzione di τ_A è normale, con una deviazione standard σ_τ del 1-3 %.

Lo spettro di potenza della scintillazione mostra un andamento costante dai 3 ai 300 Hz, frequenza dopo la quale la potenza spettrale cala rapidamente. Sotto i 3 Hz il fenomeno non è più ergodico, visto che è dovuto all'interposizione casuale di nubi o veli. Il fenomeno della scintillazione è comunque trattabile in termini di opportune medie temporali.

3.6 Proprietà statistiche di u_p e ϕ

In questa sezione vengono ricavate le proprietà statistiche (covarianza, funzione di struttura) della fase del fronte d'onda sotto l'assunzione di *near field*.

Per far ciò dobbiamo innanzi tutto supporre che l'indice di rifrazione n sia un processo stocastico *Gaussiano* (vedi [10]). A questo punto possiamo utilizzare il seguente teorema:

Se α e β sono 2 variabili stocastiche Gaussianhe allora si ha

$$\langle e^{\alpha+j\beta} \rangle = e^{\bar{\alpha}+j\bar{\beta}} e^{\frac{1}{2}(\sigma_{\alpha}^2+j2\rho\sigma_{\alpha}\sigma_{\beta}+\sigma_{\beta}^2)} \quad (3.22)$$

dove $\bar{\alpha}$, σ_{α}^2 e $\bar{\beta}$, σ_{β}^2 sono la media e la varianza rispettivamente di α e β , mentre ρ è il coefficiente di correlazione definito come

$$\rho = \frac{\langle (\alpha - \bar{\alpha})(\beta - \bar{\beta}) \rangle}{\sqrt{\sigma_{\alpha}^2\sigma_{\beta}^2}} \quad (3.23)$$

Utilizzando questo risultato e l'equazione 3.20 possiamo esprimere la covarianza di u per uno strato che si estende dall'altezza z a $z + \Delta z$ come

$$\begin{aligned} \Gamma_{u_p}(\Delta\vec{x}) &= \langle e^{j\phi(\vec{x})} e^{-j\phi(\vec{x}-\Delta\vec{x})} \rangle \\ &= e^{j\int_z^{z+\Delta z} (n(\vec{x}, z') - n(\vec{x}-\Delta\vec{x}, z')) dz'} \\ &= e^{-\frac{1}{2}\mathcal{D}_{\phi}(\Delta\vec{x})} \end{aligned} \quad (3.24)$$

con $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ e con n ci riferiamo alla sola fluttuazione dell'indice di rifrazione¹. \mathcal{D}_{ϕ} è la funzione di struttura dell'indice di rifrazione che può essere scritta come

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\phi}(\Delta\vec{x}) &= k^2 \left\langle \left(\int_z^{z+\Delta z} (n(\vec{x}-\Delta\vec{x}, z')) dz' \right)^2 \right\rangle \\ &= k^2 \int_z^{z+\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} (2\Gamma_n(0, z'-z'') - \Gamma_n(\Delta\vec{x}, z'-z'') \\ &\quad - \Gamma_n(-\Delta\vec{x}, z'-z'')) dz' dz'' \end{aligned} \quad (3.25)$$

Scrivendo la covarianza in funzione di \mathcal{D}_n mediante la 3.7 e utilizzando l'espressione esplicita di \mathcal{D}_n per il caso di KOLMOGOROV otteniamo

$$\mathcal{D}_{\phi}(\Delta\vec{x}) = 2.91 k^2 \Delta z C_n^2 |\Delta\vec{x}|^{\frac{5}{3}} \quad (3.26)$$

In questo passaggio si è supposto C_n^2 costante per tutto lo strato.

¹Dato che una fase costante non ha nessun effetto sull'immagine finale.

Definiamo allora il parametro r_0 detto *lunghezza di coerenza* o parametro di FRIED²:

$$r_0 = 0.185 \left(\frac{4\pi^2}{k^2 C_n^2 \Delta z} \right)^{\frac{3}{5}} \quad (3.27)$$

In questo modo la funzione di struttura diventa

$$\mathcal{D}_\phi^K(\Delta\vec{x}) = 6.88 \left(\frac{|\Delta\vec{x}|}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}} \quad (3.28)$$

Infine possiamo passare alla covarianza per la funzione d'onda $u(\bar{x})$:

$$\mathcal{C}_u^K(\Delta\vec{x}) = e^{-\frac{1}{2}\mathcal{D}_\phi(\Delta\vec{x})} = e^{-3.44 \left(\frac{|\Delta\vec{x}|}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}}} \quad (3.29)$$

I calcoli nel caso della distribuzione spettrale di VON KARMAN sono più complicati e quindi non verranno riportati in questa sede. Il risultato è in questo caso

$$\mathcal{D}_\phi^V(\Delta\vec{x}) = 6.16 r_0^{-\frac{5}{3}} \left(\frac{3}{5} \left(\frac{L_0}{2\pi} \right)^{\frac{5}{3}} - \left(\frac{|\Delta\vec{x}| L_0}{4\pi} \right)^{\frac{5}{6}} \frac{K_{5/6} \left(\frac{2\pi|\Delta\vec{x}|}{L_0} \right)}{\Gamma \left(\frac{11}{6} \right)} \right) \quad (3.30)$$

In questa espressione $K_{5/6}(x)$ è la funzione di BESSEL modificata di ordine $5/6$ e $\Gamma(x)$ è la funzione gamma di EULERO.

3.7 Simulazione degli effetti del seeing

La simulazione degli effetti del seeing atmosferico può essere realizzata in 4 fasi:

1. Generazione di uno o più strati di turbolenza.
2. Calcolo della GPF risultante da questi e della relativa PSF.
3. Generazione dell'immagine dell'oggetto osservato mediante convoluzione.
4. Simulazione del rumore dovuto alla quantizzazione della radiazione incidente e alle caratteristiche del ricevitore.

Il primo punto è il più delicato, quindi ce ne occuperemo nella sezione 3.8. Vediamo ora in cosa consistono le restanti fasi.

²Il parametro di FRIED indica il diametro limite al di sotto del quale un telescopio può essere considerato *diffraction-limited*, ovvero gli effetti della turbolenza possono essere trascurati. La definizione formale, basata sul concetto di intensità di STHREL è esposta in [28].

3.7.1 Calcolo della PSF

Nelle ipotesi di near-field i contributi alla distorsione della fase del fronte d'onda possono essere semplicemente sommati per ricavare la fase totale

$$\phi(\vec{x}, t) = \sum_{i=1}^4 \phi_i(\vec{x} + \vec{v}_i t) \quad (3.31)$$

In questo caso abbiamo fatto uso dell'ipotesi di TAYLOR. Le fasi dei singoli strati ϕ_i sono rappresentate mediante matrici di opportune dimensioni. La scala di queste (ovvero pixel per metro) è fissata dalla condizione di corretto campionamento della lunghezza di FRIED, mentre la lunghezza dello strato nella direzioni di spostamento determina il tempo di durata della simulazione:

$$t_{\max} = \min \frac{X_i}{v_i} \quad (3.32)$$

dove lo strato i -esimo è di dimensioni $X_i \times Y_i$, con X_i la lunghezza nella direzione di scorrimento. La larghezza Y_i deve essere almeno tale da coprire la pupilla.

A questo punto possiamo facilmente formare la nostra GPF, passando dalle coordinate (x, y) a $(U, V) = (\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda})$:

$$P(U, V) = \begin{cases} e^{i\phi(U, V)} & \text{per } U^2 + V^2 \leq \frac{D^2}{\lambda^2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (3.33)$$

e da questa passare alla PSF

$$h(u, v) = |\mathcal{F}[P(U, V)]|^2 \quad (3.34)$$

Questa va infine normalizzata in modo da avere l'intensità totale uguale a 1. Chiaramente questi calcoli vengono fatti su matrici, quindi la trasformata di FOURIER viene sostituita dalla FFT e gli integrali da sommatorie.

Più complicato è il caso di geometria anisoplanatica. Questa è rappresentata in figura 3.2. La fase della GPF dipende ora dall'angolo di osservazione θ . Se vogliamo simulare l'immagine risultante dall'osservazione per 2 oggetti spostati di un angolo θ dobbiamo calcolare l'effettivo spostamento spaziale per ogni singolo strato di turbolenza:

$$d_i = h_i \tan \theta \quad (3.35)$$

In quest'espressione h_i è l'altezza dello strato i -esimo. Le fasi derivanti da ogni singolo strato di turbolenza saranno spostate di questa distanza d_i per tenere conto dell'anisoplanatismo.

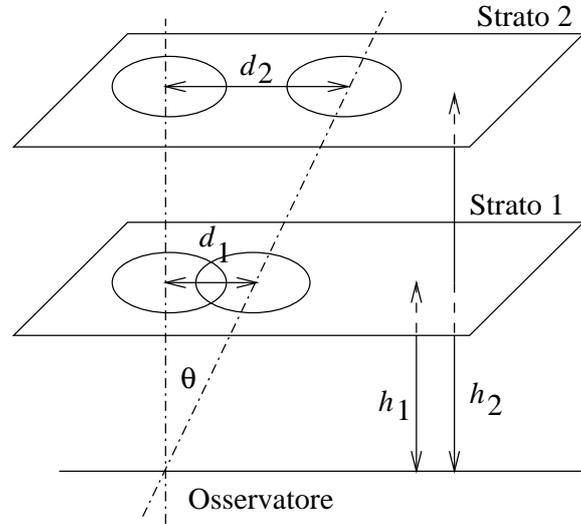


Figura 3.2: Geometria per il calcolo della GPF nel caso anisoplanatico a più strati.

3.7.2 Generazione dell'immagine

Una volta generata la PSF è facile passare all'immagine osservata mediante una convoluzione.

$$I = h * O \quad (3.36)$$

In pratica questo calcolo viene effettuato, utilizzando il teorema della convoluzione, mediante la FFT vista la più alta velocità computazionale. Per evitare problemi con la convoluzione in forma discreta il formato dell'immagine in entrata deve soddisfare la 2.47. L'immagine in uscita avrà un rapporto segnale-rumore infinito.

3.7.3 Simulazione del rumore

Per simulare lo shot noise dobbiamo applicare le seguenti operazioni all'immagine:

1. Innanzi tutto dobbiamo calcolare il numero medio di fotoni per immagine \bar{K} :

$$\bar{K} = FA \Delta t \quad (3.37)$$

dove F è il flusso di fotoni espresso in fotoni per metro quadro al secondo, A è la superficie del collettore e Δt il tempo di integrazione.

2. È conveniente normalizzare l'immagine a cui aggiungere lo shot noise. Posto $I_{i,j}$ il valore del pixel (i,j) dell'immagine di supporto $n \times m$, il

valore normalizzato è:

$$I'(i, j) = \frac{I(i, j)}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m I(i, j)} \quad (3.38)$$

3. A questo punto utilizziamo un generatore di numeri casuali con distribuzione Poissoniana e media $\mu = \overline{KI}'(i, j)$ per ricavare il numero di fotoni per singolo pixel

$$I(i, j) = \text{Poisson}(\overline{KI}'(i, j)) \quad (3.39)$$

Per una corretta modellizzazione del ricevitore dobbiamo tenere conto anche del rumore additivo, che può essere assunto Poissoniano con una media data μ_0 . L'intensità sul pixel diventa quindi

$$I(i, j) = I(i, j) + \text{Poisson}(\mu_0) \quad (3.40)$$

3.8 Simulazione dello strato di turbolenza

La parte più complicata della simulazione è la generazione di una realizzazione della fase $\phi_i(\vec{x})$ che rappresenta il contributo alla GPF dello strato i -esimo. Per semplicità ometteremo l'indice dello strato di turbolenza. In pratica il risultato del generatore sarà una matrice $\phi_{i,j}$ di dimensione $n \times m$ con un dato fattore di scala s , che indica quanti pixel corrispondono ad un metro, e con dati parametri fisici r_0 e L_0 .

3.8.1 Metodi di simulazione

Riportiamo brevemente i metodi di simulazione dello schermo di fase comunemente utilizzati.

Simulazione zonale tramite FFT. È un sistema robusto e veloce per la simulazione ad accuratezza medio-alta di fronti d'onda di grande formato. È quindi adatto a simulazioni di lunghe serie temporali.

Simulazione modale tramite polinomi di Zernike. Si basa sullo sviluppo della fase dell'onda entrante in polinomi di ZERNIKE. I coefficienti di questo vengono scelti in modo tale da dare il giusto spettro di potenza. La qualità raggiungibile è limitata dal numero di coefficienti di ZERNIKE che vengono inclusi nello sviluppo. I problemi di calcolo dei polinomi limitano la capacità del metodo di riprodurre le alte frequenze spaziali e la durata massima della simulazione. Per questo motivo non è stato realizzato per questo lavoro un algoritmo basato su polinomi di ZERNIKE

Simulazione modale tramite serie di Fourier. È basato sullo sviluppo della fase in serie di Fourier. I risultati sono di alta qualità e permettono la simulazione di osservazioni a grande campo angolare e di lunghe serie temporali. Il problema di questo metodo è la lentezza dell'algoritmo utilizzato per generare lo schermo di fase.

3.8.2 Simulazione zonale tramite FFT

Si basa sul seguente teorema della teoria dei processi stocastici:

Per ottenere un processo stocastico con un dato spettro di frequenza $\Omega(f)$ basta filtrare un processo stocastico Gaussiano con un filtro con risposta $\sqrt{\Omega(f)}$

Fissiamo ora la notazione usata nella formulazione dell'algoritmo effettivamente utilizzato. Lo schermo di fase è assunto di dimensioni $G_x \times G_y$ in metri e $N_x \times N_y$ in pixel, mentre r_0 e L_0 sono rispettivamente il parametro di FRIED e la lunghezza di scala esterna. La fase nel punto $m \frac{G_x}{N_x}, n \frac{G_y}{N_y}$ (in metri) è

$$\phi_{m,n}^{\text{FFT}} = \sum_{m'=-\frac{N_x}{2}}^{\frac{N_x}{2}-1} \sum_{n'=-\frac{N_y}{2}}^{\frac{N_y}{2}-1} h_{m',n'}^{\text{FFT}} f_{m',n'}^{\text{FFT}} e^{i2\pi \left(\frac{m'm}{N_x} + \frac{n'n}{N_y} \right)} \quad (3.41)$$

dove $h_{m',n'}$ è un rumore normale complesso hermitiano con media nulla e $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $f_{m',n'}$ è la funzione filtro:

$$f_{m',n'}^{\text{FFT}} = \frac{0.151319}{\sqrt{G_x G_y} r_0^{5/6} \left(\left(\frac{m'}{G_x} \right)^2 + \left(\frac{n'}{G_y} \right)^2 + L_0^{-2} \right)^{11/12}} \quad (3.42)$$

Inoltre si pone $f_{0,0} = 0$ per eliminare la componente continua di ϕ . Nel caso di schermi asimmetrici la funzione di struttura dello schermo subisce una deformazione dovuta al fatto che nella direzione dell'asse maggiore vengono campionate anche frequenze più basse rispetto alla direzione dell'asse minore. Questo problema viene risolto pesando opportunamente $f_{1,0}$ e $f_{-1,0}$, corrispondenti all'asse X, rispetto a $f_{0,1}$ e $f_{0,-1}$, corrispondenti all'asse Y. I pesi vengono scelti empiricamente (vedi [31]).

Il problema di questo sistema è l'impossibilità di riprodurre accuratamente le basse frequenze spaziali, inferiori al reciproco della dimensione della matrice di supporto. Per ovviare a questo problema si aggiungono all'immagine le cosiddette *subarmoniche*. Queste si ottengono campionando frequenze decrescenti in modo quadratico. Il metodo di generazione delle subarmoniche utilizzato è quello di LANE, GLINDEMANN e DAINITY. In questo metodo la subarmonica di ordine p campiona la potenza spettrale alle frequenze spaziali $(\pm 3^{-p} \frac{1}{G}, \pm 3^{-p} \frac{1}{G})$. In questo caso ci siamo limitati al

caso di supporto quadrato di dimensioni $G \times G$ in metri e $N_G \times N_G$ in pixel. Lo schermo di fase viene generato mediante l'espressione:

$$\phi_{r,s}^{\text{LF}} = \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{m'=-1}^1 \sum_{n'=-1}^1 h_{m',n'}^{\text{LF}} f_{m',n'}^{\text{LF}} e^{i2\pi 3^{-p} \left(\frac{m'm}{N_x} + \frac{n'n}{N_y} \right)} \quad (3.43)$$

dove N_p è il numero di subarmoniche incluse e $h_{m',n'}^{\text{LF}}$ un rumore normale hermitiano con media nulla. In prima approssimazione questo rumore ha $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{9/8}$, valore che deriva dal fatto che si pone $f_{m',n'}^{\text{LF}} = 0$ e quindi l'energia persa a frequenza spaziale $(0, 0)$ deve essere comunque considerata nella normalizzazione. Ciò vale solo nel caso che la distribuzione spettrale all'origine è circa uniforme; nel caso generale deve essere applicato il metodo di SEDMAK di normalizzazione delle subarmoniche, descritto in appendice A. La funzione di filtro assume la forma:

$$f_{m',n'}^{\text{LF}} = \frac{0.151319}{G r_0^{5/6} 3^{-p} \left(\left(\frac{3^{-p} m'}{G} \right)^2 + \left(\frac{3^{-p} n'}{G} \right)^2 + L_0^{-2} \right)^{11/12}} \quad (3.44)$$

Lo schermo così ottenuto viene infine interpolato linearmente su un supporto di dimensioni compatibili con ϕ^{FFT} e sommato ad esso. Il valore minimo di N_G è 2, ma buoni risultati si ottengono con $N_G = 8$.

Per una riproduzione fedele dello spettro di potenza deve valere la relazione $\frac{\min(G_x, G_y)}{L_0} \geq 3$ (vedi [33]). Se aggiungiamo a questa condizione la necessità di una corretta campionatura di r_0 otteniamo (supponendo $G_y \leq G_x$):

$$N_y \geq 2 \frac{G_y}{r_0} \geq 6 \frac{L_0}{r_0} \quad (3.45)$$

Calcolo della funzione di struttura media

Per lo schermo di fase della FFT e, in maniera *approssimata*³ per quanto riguarda lo schermo di fase subarmonico è possibile calcolare in modo analitico la funzione di struttura media. Questo è un grande vantaggio in fase di controllo della correttezza dei risultati delle simulazioni. La funzione di struttura, in forma discreta, è data dalla:

$$\mathcal{D}_{m,n}^A = 2(B_{0,0} - B_{m,n}) \quad (3.46)$$

con

$$B_{m,n} = B_{m,n}^{\text{FFT}} + \left\{ B_{r,s}^{\text{LF}} \text{ ricampionata su } N_x \times N_y \right\}_{m,n} \quad (3.47)$$

³Questo è dovuto al non corretto campionamento implicito nel modo di costruire le subarmoniche.

$$B_{m,n}^{\text{FFT}} = \sum_{m'=-\frac{N_x}{2}}^{\frac{N_x}{2}-1} \sum_{n'=-\frac{N_y}{2}}^{\frac{N_y}{2}-1} \left(f_{m',n'}^{\text{FFT}} \right)^2 e^{i2\pi \left(\frac{m'm}{N_x} + \frac{n'n}{N_y} \right)} \quad (3.48)$$

$$B_{r,s}^{\text{LF}} = \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{m'=-1}^1 \sum_{n'=-1}^1 \left(f_{m',n'}^{\text{LF}} \right)^2 e^{i2\pi 3^{-p} \left(\frac{m'm}{N_x} + \frac{n'n}{N_y} \right)} \quad (3.49)$$

3.8.3 Simulazione zonale tramite serie di Fourier

La fase dello strato ϕ , fissati i parametri r_0 , L_0 ed eventualmente l_0 che ne determinano lo spettro di potenza, può essere espressa mediante una serie di FOURIER troncata all'ordine N :

$$\phi(x, y) = \sum_{n=-N+1}^{N-1} \sum_{m=-N+1}^{N-1} c_{n,m} e^{i2\pi \frac{nx+my}{D_p}} \quad (3.50)$$

dove D_p è la dimensione del supporto dello schermo. Come si vede chiaramente da questa formula, lo schermo di fase così generato è periodico con periodo $D_p \times D_p$. ϕ è in generale complesso e quindi possiamo prenderne sia la parte reale che quella immaginaria come realizzazioni indipendenti dello schermo di fase. Inoltre i coefficienti $c_{n,m}$ sono complessi hermitiani e quindi la 3.50 può essere scritta come:

$$\phi(x, y) = 2 \Re \left[\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \left(c_{n,m} e^{i2\pi \frac{nx+ny}{D_p}} + c_{n,-m} e^{i2\pi \frac{nx-my}{D_p}} \right) \right] \quad (3.51)$$

$$\phi'(x, y) = 2 \Im \left[\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \left(c_{n,m} e^{i2\pi \frac{nx+ny}{D_p}} + c_{n,-m} e^{i2\pi \frac{nx-my}{D_p}} \right) \right] \quad (3.52)$$

dove ora ϕ e ϕ' sono 2 schermi di fase reali. Per ottenere il corretto spettro di potenza si impone la condizione sulla varianza dei coefficienti $c_{n,m}$:

$$\sigma_{c_{n,m}}^2 = \Phi \left(\frac{n}{D_p}, \frac{m}{D_p} \right) \quad (3.53)$$

Nel caso, più comune, di spettro di potenza di VON KARMAN abbiamo:

$$\Phi^{\text{VK}}(\vec{f}) = \frac{0.023 \left(\frac{D_p}{r_0} \right)^{\frac{5}{3}}}{\left(|\vec{f}|^2 D_p^2 + \left(\frac{D_p}{r_0} \right)^2 \right)^{\frac{11}{6}}} \quad (3.54)$$

In pratica i coefficienti $c_{n,m}$ si ottengono filtrando con un filtro di risposta $\sqrt{\Phi}$ un rumore Gaussiano Hermitiano complesso a media nulla e varianza 1.

La qualità della simulazione è determinata dall'ordine di troncamento N . Un criterio ricavato per via numerica (vedi [33]) è il seguente:

$$N \geq \max \left(3 \frac{L_0}{r_0}, 60 \right) \quad (3.55)$$

Capitolo 4

Risultati nello studio del *seeing* atmosferico

In questo capitolo vengono analizzati i risultati delle simulazioni e, quando sia possibile, questi sono validati mediante un confronto con i modelli teorici. Inoltre i risultati delle simulazioni verranno messi a confronto con dati osservativi. Innanzi tutto è necessario fissare i modelli di strumento astronomico, oggetto osservato e turbolenza atmosferica usati in seguito.

4.1 Modello dello strumento astronomico

Il formato dell'immagine usato in uscita è 512×512 , che garantisce un buon rapporto tra precisione e occupazione di memoria. Le pupille e lo schermo di fase sono campionati con 32 punti per metro. Questo permette un adeguato campionamento di r_0 , che in banda V vale circa 10 cm, e allo stesso tempo ci permette di simulare, tenendo conto dei problemi della convoluzione ciclica, una pupilla fino ad 8 metri di diametro. In questo lavoro è discussa la formazione dell'immagine in banda V, quindi la lunghezza d'onda λ viene fissata a 555 nm. Utilizzando il teorema del campionamento otteniamo che, con questi parametri, l'immagine in uscita copre un'area di cielo di 3.66×3.66 secondi d'arco, ovvero un pixel dell'immagine equivale 7.15×10^{-3} secondi d'arco. Questa è un'adeguata dimensione di campo visto il fatto che qualitativamente l'immagine di seeing ha un diametro dell'ordine di 1 secondo d'arco.

Tenendo conto del tempo di vita delle speckles (vedi sezione 4.5.3), le immagini vengono prodotte ad un intervallo di tempo di un centesimo di secondo ovvero ad una frequenza di 100 Hz. La magnitudine integrata dell'oggetto viene determinata fissando il numero di fotoni per immagine. Per una stella di magnitudine 0 il flusso di fotoni è circa 1.0×10^{10} fotoni al secondo per metro quadrato. Se consideriamo un tempo di integrazione di un centesimo di secondo e chiamiamo D il diametro della pupilla e M la

magnitudine integrata dell'oggetto e assumiamo l'efficienza quantica della CCD $\eta = 0.8$ allora il numero di fotoni per immagine è

$$N_f = 6.3 \times D^2 \times 10^{7 - \frac{M}{2.5}} \quad (4.1)$$

Al rumore di shot noise viene aggiunto un rumore Poissoniano additivo con $\mu = 0.1$. L'immagine viene memorizzata con una parola abbastanza ampia da evitare problemi di overflow. In pratica, dato l'esiguo numero di fotoni per pixel per fotogramma basta una parola di 16 bit.

Le pupille effettivamente simulate saranno di 40, 180, 350 e 800 centimetri. Quindi andiamo da telescopi per amatori fino alle più grandi singole aperture esistenti.

4.2 Modello della sorgente astronomica

Le simulazioni della formazione dell'immagine verranno condotte su 2 classi di oggetti, che rappresentano diverse morfologie che possono presentarsi in casi pratici.

4.2.1 Oggetto *artificiale*

Questo è composto da 2 stelle (rappresentate come gaussiane con $\sigma = 1$ pixel) e un eventuale halo (rappresentato da una gaussiana con $\sigma = 50$ pixel). L'ampiezza della primaria è unitaria, mentre quella della secondaria è uguale o 2,10 o 100 volte minore. La distanza tra le due componenti è di 65, 32, 16, 8 o 4 centesimi di secondo d'arco. L'halo può essere assente oppure avere un'ampiezza da 10 a 1000000 (in incrementi di 10×) volte minore della componente primaria.

4.2.2 Oggetto *naturale*

Il secondo oggetto è un oggetto complesso, ottenuto ricampionando in un'area di 1.6×1.6 secondi d'arco¹ un'immagine di η Carinae ottenuta dallo *Hubble Space Telescope*. L'immagine è riportata in figura 4.2.

4.3 Modello di turbolenza atmosferica

I vari modelli a strati di turbolenza atmosferica sono stati ampiamente discussi nella sezione 3.4. Qui verranno ripresi solamente i parametri caratteristici dei 2 modelli che verranno adottati nelle simulazioni. I parametri importanti sono la lunghezza di coerenza r_0 , la velocità di traslazione dello strato e la direzione di scorrimento dello strato. Questi dati sono compendati in tabella 4.1.

¹Per evitare problemi di deconvoluzione ciclica.

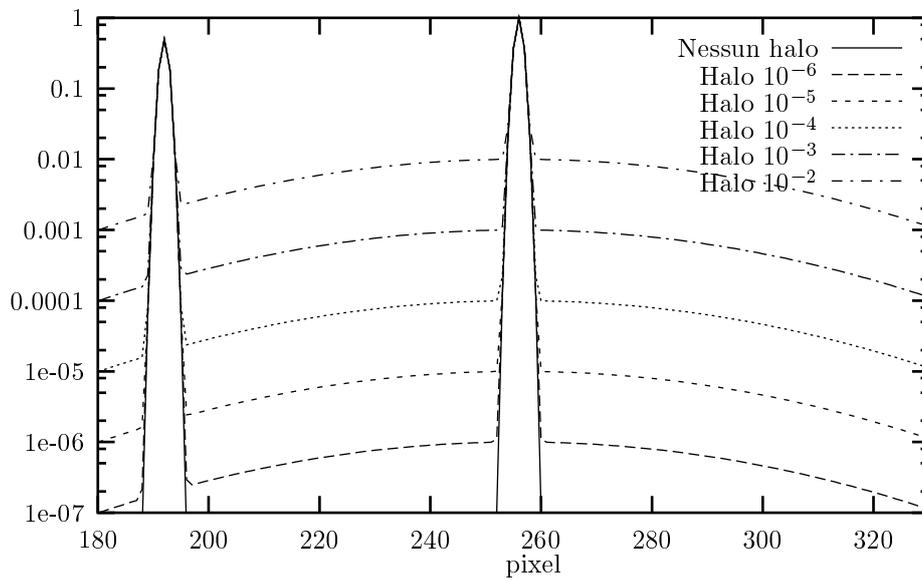


Figura 4.1: Profili fotometrici lungo la diagonale principale dell'immagine in ingresso nel caso di stella doppia con separazione di 64 centesimi di secondo d'arco, secondaria con luminosità di picco del 50% rispetto alla primaria e halo di luminosità di picco minore di un fattore da 10 a 1000000.

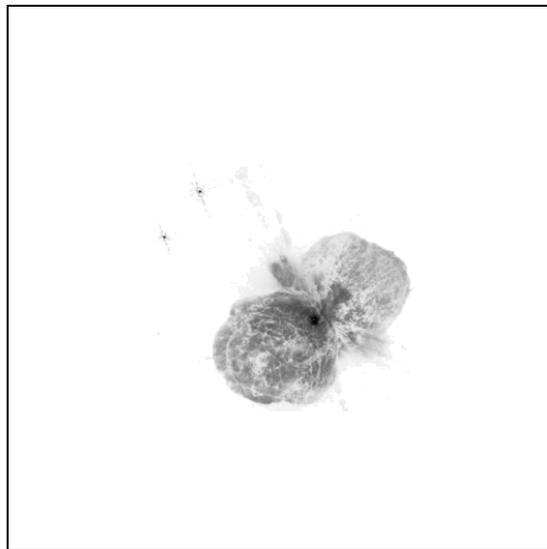


Figura 4.2: Oggetto astronomico utilizzato nelle simulazioni liberamente ispirato a η Carinae

	Strato 1	Strato 2	Strato 3	Strato 4	r_0 tot.
Altezza [m]	200	2000	10000	18000	
Velocità [m/s]	5	10	15	20	
Direzione [°]	0	90	0	90	
r_0 GREENWOOD [cm]	8.4	31.0	53.6	458.8	7.7
r_0 SLC-N [cm]	15.7	16.4	84.6	151.7	10.3

Tabella 4.1: Riassunto dei parametri della turbolenza utilizzati.

Le dimensioni dello schermo di fase simulato sono di $100 \times 100 \text{ m}^2$. Sono stati generati schermi con gli r_0 della tabella 4.1 e con L_0 compatibili con l'altezza dello strato simulato, quindi 30 m per tutti gli strati e 300 m per gli ultimi 3. La tecnica utilizzata per le subarmoniche è quella di LANE, *Glindemann* e *Dainty* con 3 livelli di subarmonica.

4.4 Statistica dello schermo di fase

Come spiegato nella sezione 2.2.2 un vantaggio del metodo di generazione dello schermo di fase tramite FFT è la possibilità di calcolarne la funzione di struttura senza dover ricorrere alla media di diverse realizzazioni di questo. I risultati sono riportati in figura 4.3 e 4.4.

Nell'analizzare questi grafici è d'uopo ricordare il carattere approssimato dell'equazione 3.47 utilizzata per ricavarli.

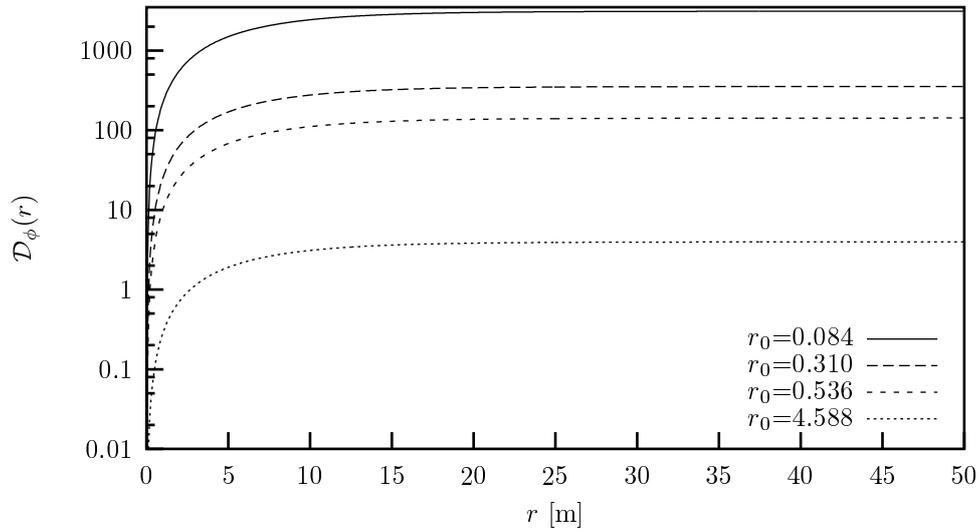


Figura 4.3: Funzione di struttura per il modello a strati GREENWOOD nel caso di $L_0 = 30$ m. La discrepanza con il caso teorico è del tutto trascurabile.

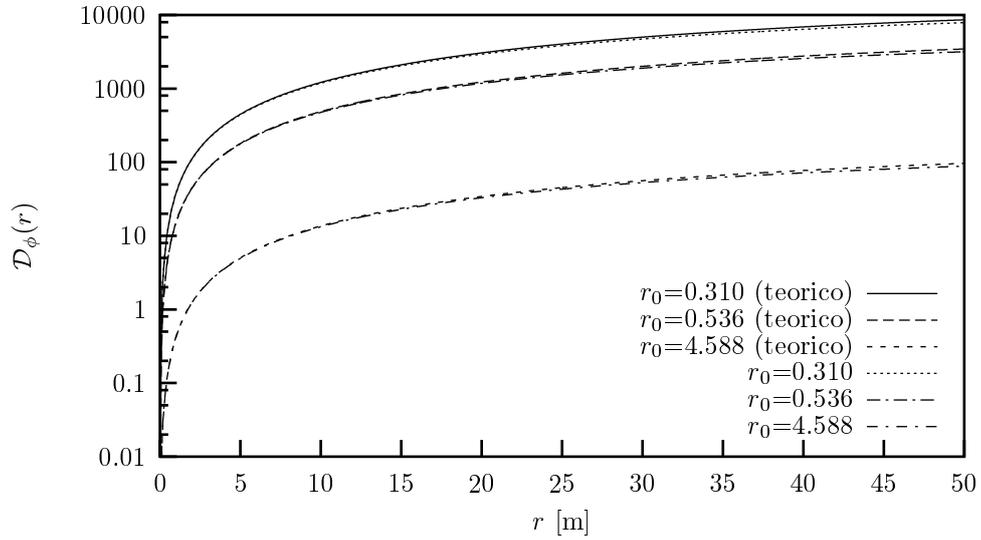


Figura 4.4: Funzione di struttura per il caso del modello a strati GREENWOOD nel caso di $L_0 = 300$ m. L'ordinata è in scala logaritmica, quindi la discrepanza tra caso teorico e risultato della simulazione non è del tutto trascurabile (vedi figura 4.5).

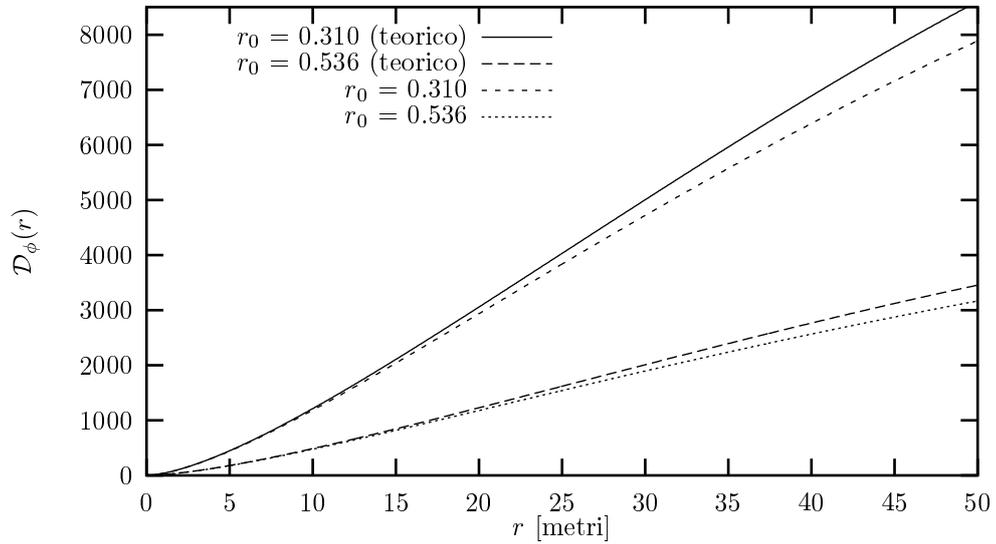


Figura 4.5: Come in figura 4.4 ma in scala non logaritmica.

4.4.1 Determinazione statistica della funzione di struttura

In questa sezione vedremo i risultati del calcolo diretto della funzione di struttura. Tutti i grafici qui riportati sono stati ottenuti da N diverse realizzazioni dello schermo di fase mediante l'espressione:

$$\mathcal{D}(\vec{r}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\phi_i(\vec{r}) - \phi_i(0))^2 \quad (4.2)$$

In tutti i casi il supporto è di 30 metri. Come si vede dalle figure 4.6, 4.7, 4.8, 4.9 e 4.10 la tecnica basata su FFT con aggiunta di subarmoniche approssima meglio la funzione di struttura teorica per quanto riguarda la potenza totale, mentre utilizzando lo sviluppo in serie di FOURIER i grafici risultanti sono meno rumorosi. Nelle simulazioni con FFT sono stati usati 5 livelli di subarmonica.

Dalle figure 4.9 e 4.10 è visibile l'inadeguatezza del metodo nel riprodurre la funzione di struttura nel caso di L_0 maggiore del supporto.

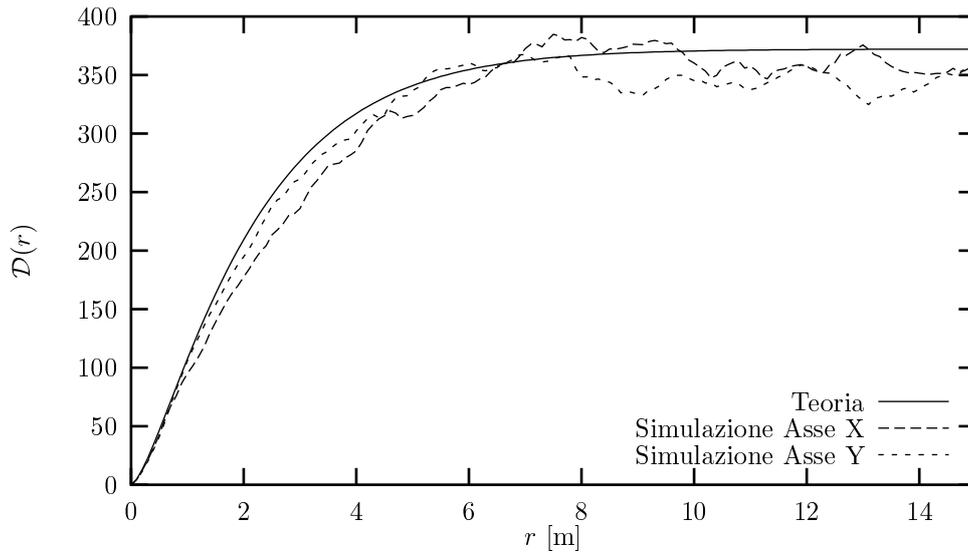


Figura 4.6: Funzione di struttura ottenuta col metodo FFT+Subarmoniche. Supporto 30 metri, $r_0 = 0.10$ m e $L_0 = 10$ m. Sono state mediate 500 realizzazioni indipendenti.

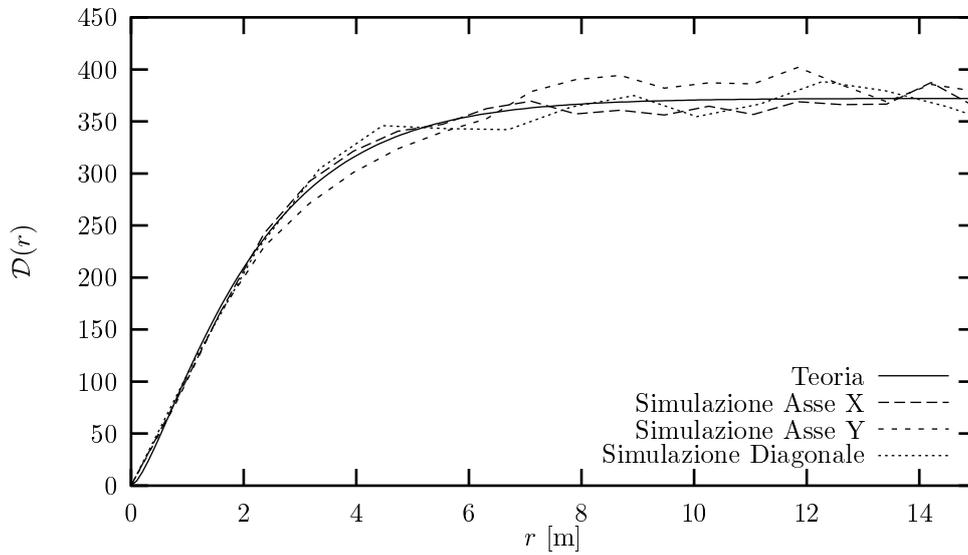


Figura 4.7: Funzione di struttura ottenuta col metodo Fourier Series. Supporto 30 metri, $r_0 = 0.10$ m e $L_0 = 10$ m. Sono state mediate 1000 realizzazioni indipendenti.

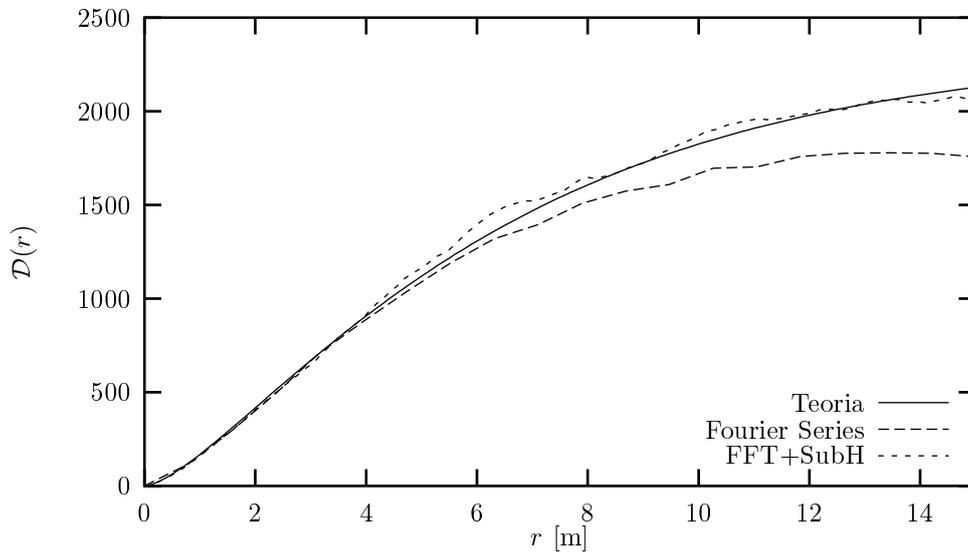


Figura 4.8: Grafico comparativo delle funzioni di struttura. Supporto 30 metri, $r_0 = 0.10$ m e $L_0 = 30$ m. Sono state mediate 1000 realizzazioni indipendenti.

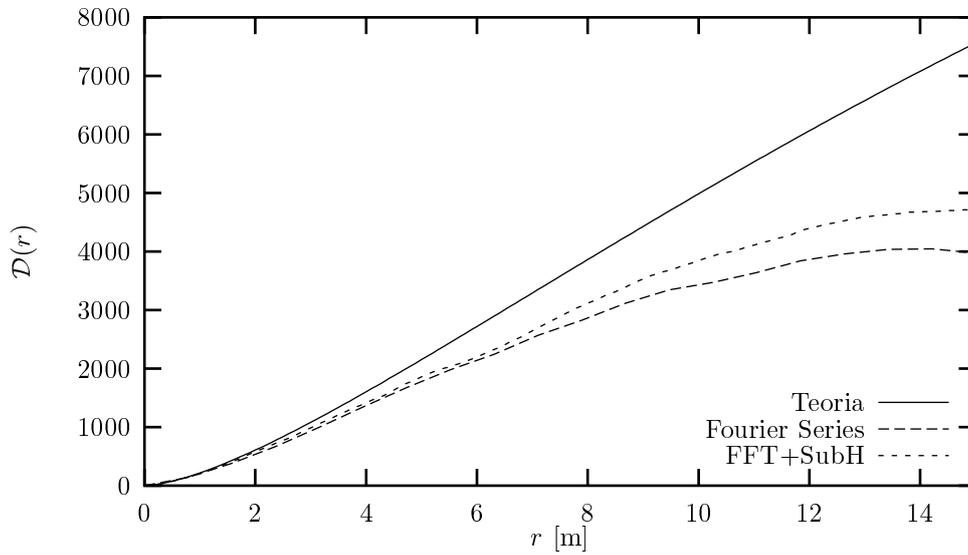


Figura 4.9: Grafico comparativo delle funzioni di struttura. Supporto 30 metri, $r_0 = 0.10$ m e $L_0 = 100$ m. Sono state mediate 1000 realizzazioni indipendenti.

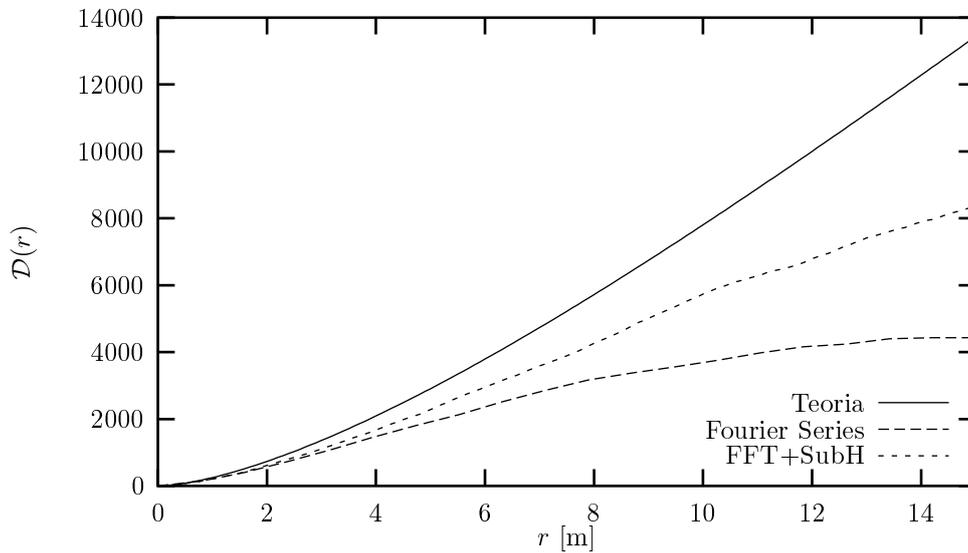


Figura 4.10: Grafico comparativo delle funzioni di struttura. Supporto 30 metri, $r_0 = 0.10$ m e $L_0 = 300$ m. Sono state mediate 1000 realizzazioni indipendenti.

4.5 Proprietà della PSF

4.5.1 Profili della PSF

Risultati teorici

Vediamo il problema della formazione dell'immagine da un diverso punto di vista, più adatto ad ulteriori sviluppi teorici.

Detta $u_i(\vec{x})$ l'onda luminosa proveniente dall'oggetto astronomico e $t = e^{j\phi(\vec{x})}$ la trasmittanza dell'atmosfera, allora il campo nella pupilla del telescopio $u_p(\vec{x})$ è

$$u_p(\vec{x}) = t(\vec{x}) u_i(\vec{x}) \quad (4.3)$$

Utilizzando la teoria dei processi stocastici il legame tra le relative funzioni di correlazione può essere espresso come

$$\Gamma_{u_p}(\Delta\vec{x}) = \Gamma_t(\Delta\vec{x}) \Gamma_{u_i}(\Delta\vec{x}) \quad (4.4)$$

Utilizzando la 2.59 possiamo esprimere lo spettro dell'immagine formata dal sistema atmosfera+telescopio come

$$I(\vec{f}) = \Gamma_i(\lambda\vec{f}) \Gamma_t(\lambda\vec{f}) \int W(\vec{x}) W(\vec{x} - \lambda\vec{f}) d\vec{x} \quad (4.5)$$

Prima di proseguire notiamo che

- Il teorema di ZERNIKE-VAN CITTER ci permette di esprimere $\Gamma_i(\lambda\vec{f})$ in funzione dello spettro dell'onda proveniente dall'oggetto osservato $O(\vec{f})$.
- Siamo nel caso di sistema ottico focalizzato e possiamo assumere un ingrandimento unitario.
- Riconosciamo nella 4.5 l'autocorrelazione della pupilla che definisce, a meno di una costante, l'OTF del telescopio.
- Possiamo, come abbiamo già fatto, tralasciare i fattori costanti nella 4.5.

Armati di tutte queste considerazioni possiamo scrivere l'equazione per la formazione dell'immagine nello spazio delle frequenze spaziali come

$$I(\vec{f}) = O(\vec{f}) \mathcal{H}(\vec{f}) \mathcal{H}_{LE}(\vec{f}) \quad (4.6)$$

con

$$\mathcal{H}_{LE}(\vec{f}) = \frac{\Gamma_t(\lambda\vec{f})}{\Gamma_t(0)} \quad (4.7)$$

Esprimiamo ora $\mathcal{H}_{\text{LE}}(\vec{f})$ in termini della funzione di struttura di ϕ . Utilizzando il teorema enunciato a pagina 30 nel caso di variabile aleatoria singola abbiamo

$$\begin{aligned}\Gamma_t(\Delta\vec{x}) &= \langle t_s(\vec{x}) t_s^*(\vec{x} - \Delta\vec{x}) \rangle \\ &= e^{j(\langle\phi(\vec{x})\rangle - \langle\phi(\vec{x} - \Delta\vec{x})\rangle)} \\ &\quad \times e^{-\frac{1}{2}(\langle(\phi(\vec{x}) - \phi(\vec{x} - \Delta\vec{x}))^2\rangle - (\langle\phi(\vec{x})\rangle - \langle\phi(\vec{x} - \Delta\vec{x})\rangle)^2)}\end{aligned}\quad (4.8)$$

e considerando che un processo stocastico ergodico è anche stazionario in senso ampio, quindi $\langle\phi(\vec{x})\rangle = \langle\phi(\vec{x} - \Delta\vec{x})\rangle$, e ricordando la definizione di funzione di struttura otteniamo infine

$$\mathcal{H}_{\text{LE}}(\vec{f}) = e^{-\frac{1}{2}\mathcal{D}_\phi(\lambda\vec{f})} \quad (4.9)$$

da questa è facile² passare alla PSF del sistema atmosfera+telescopio.

Alternativamente possiamo considerare l'OTF e la PSF derivante dalle esposizioni a breve periodo, le cosiddette *short time* PSF e OTF. Possiamo affrontare il problema sia dal punto di vista pratico-operativo che da quello analitico:

- Prima di integrare ogni PSF generata la ricentriamo. Le coordinate del centroide dell'immagine sono:

$$C_i = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} I_{i,j} i}{\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} I_{i,j}} \quad (4.10)$$

$$C_j = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} I_{i,j} j}{\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} I_{i,j}} \quad (4.11)$$

Dove $I_{i,j}$ è il pixel nella posizione i, j dell'immagine di supporto $N \times N$. Quindi ogni fotogramma viene traslato di $(-C_x, -C_y)$ prima di essere sommato all'immagine risultante.

- Analiticamente possiamo ottenere lo stesso risultato aggiungendo un termine di fase lineare alla trasmittanza:

$$t_s = e^{j(\phi(\vec{x}) - \vec{a} \cdot \vec{x})} \quad (4.12)$$

dove (sotto inteso $\vec{x} = (x, y)$):

$$\vec{a} = \left(\frac{1}{K_x} \int W(\vec{x}) \psi(\vec{x}) x \, d\vec{x}, \frac{1}{K_y} \int W(\vec{x}) \psi(\vec{x}) y \, d\vec{x} \right) \quad (4.13)$$

$$K_x = \int W(\vec{x}) x^2 \, d\vec{x} \quad (4.14)$$

$$K_y = \int W(\vec{x}) y^2 \, d\vec{x} \quad (4.15)$$

²Almeno in linea di principio o nel caso di immagine discreta computando in via numerica la DFT.

Passare all'espressione analitica della OTF è assai complicato (vedi [36]), quindi riporto solo il risultato:

$$\mathcal{H}_{\text{SE}}(\vec{f}) = e^{-\frac{1}{2}\left(\mathcal{D}_\phi(\lambda\vec{f}) - \frac{1}{2}\overline{|\vec{a}|^2}|\lambda\vec{f}|^2\right)} \quad (4.16)$$

dove

$$\frac{\overline{|\vec{a}|^2}}{2} = \frac{6.88}{r_0^{\frac{5}{3}}D^{\frac{1}{3}}} \quad (4.17)$$

Confronto con le simulazioni

Per ottenere le PSF *short exposure* e *long exposure* sono state mediate 500 speckle (ovvero una simulazione da 5 s) ottenute per una data realizzazione dello schermo di fase. Per le immagini è stato assunto un rapporto SNR infinito e nessun rumore additivo. Le PSF sono normalizzate ponendo uguale a 1 il loro integrale su tutta l'immagine. All'immagine finale è stata applicata una media circolare, quindi le ascisse sono in pixel dal centro. L'immagine di confronto è stata ottenuta in base alle formule della sezione precedente, prendendo il valore di r_0 totale dei 4 strati:

$$r_0^{-\frac{5}{3}} = \sum_i r_{0_i}^{-\frac{5}{3}} \quad (4.18)$$

Osservando i grafici 4.11, 4.12, 4.13 e 4.14 possiamo vedere una buona coincidenza tra i risultati delle simulazioni e le predizioni teoriche *escluso* per la zona periferica. Questo fenomeno è discusso nella sezione 2.2.2. Comunque l'energia presente in questa zona dell'immagine è piccola (le ordinate sono in scala logaritmica).

Notiamo che sull'ascissa delle figure sono indicati i pixel dal centro dell'immagine. Per avere un riscontro veloce con le dimensioni espresse in secondi d'arco basta notare che 250 pixel equivalgono a circa $1.8''$.

Nella figura 4.15 è presentata un'immagine tridimensionale di una singola PSF nel caso di pupilla da 1.8 m. La figura 4.16 illustra invece le sezioni della stessa immagine per diversi valori sull'asse x . In questo caso l'ordinata è logaritmica.

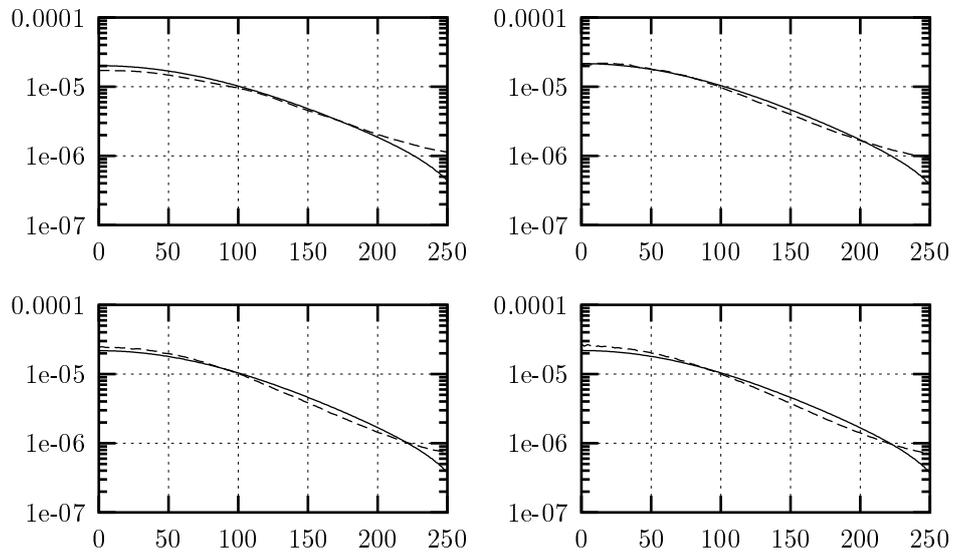


Figura 4.11: Profilo della Long Time PSF teorico. Modello a strati *Greenwood*. Da sinistra a destra e dall'alto in basso pupille da 40 cm, 1.8 m, 3.5 m e 8 m.

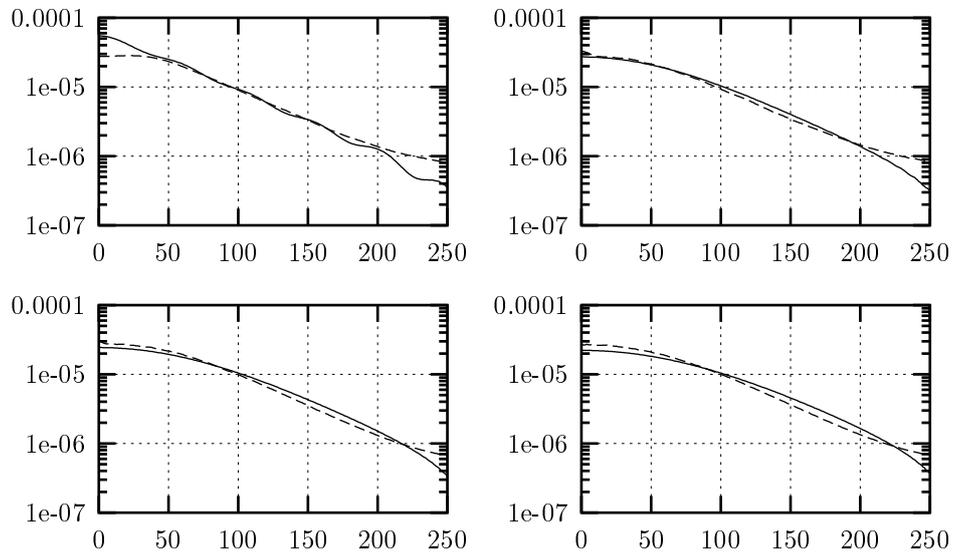


Figura 4.12: Profilo della Short Time PSF teorico. Modello a strati *Greenwood*. Da sinistra a destra e dall'alto in basso pupille da 40 cm, 1.8 m, 3.5 m e 8 m.

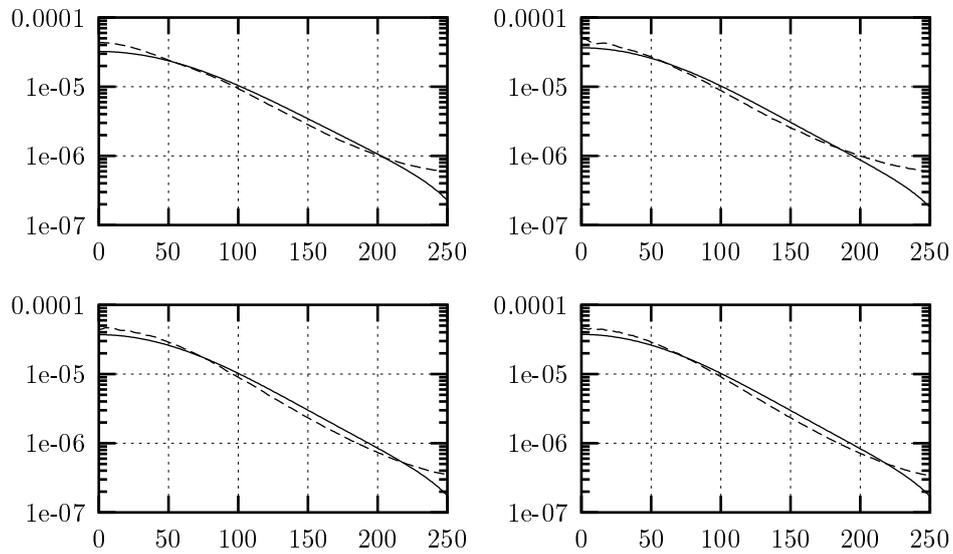


Figura 4.13: Profilo della Long Time PSF teorico. Modello a strati *SLC-N*. Da sinistra a destra e dall'alto in basso pupille da 40 cm, 1.8 m, 3.5 m e 8 m.

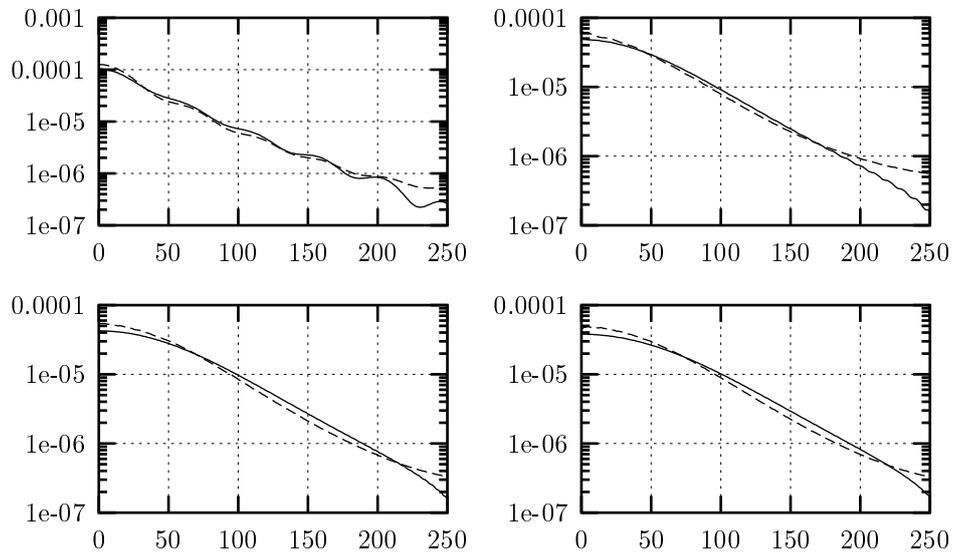


Figura 4.14: Profilo della Short Time PSF teorico. Modello a strati *SLC-N*. Da sinistra a destra e dall'alto in basso pupille da 40 cm, 1.8 m, 3.5 m e 8 m.

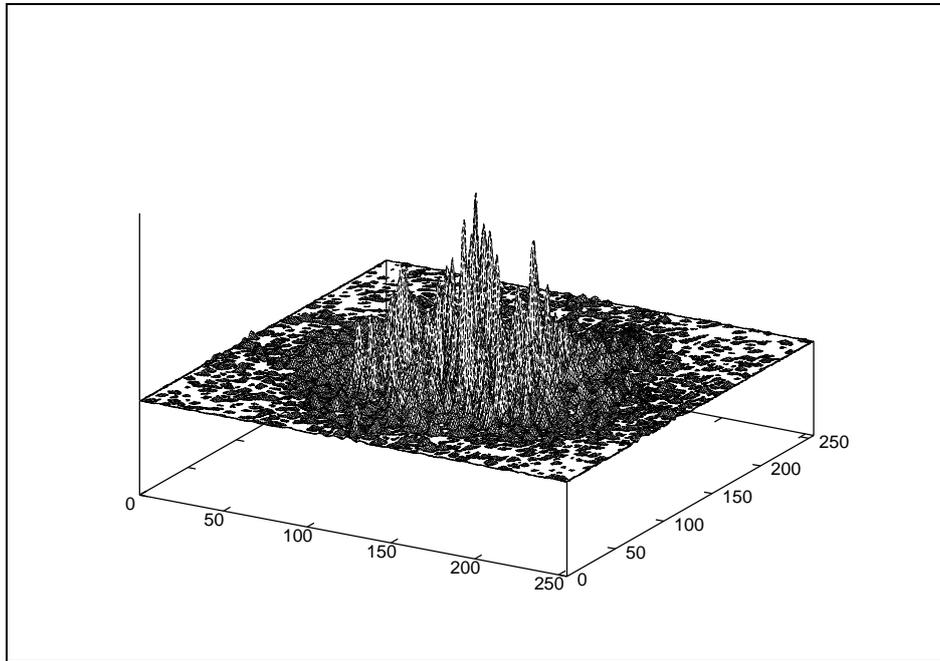


Figura 4.15: Visione 3D della PSF nel caso di pupilla da 1.8 m e modello di GREENWOOD. L'immagine è stata ricampionata su un supporto 256×256 .

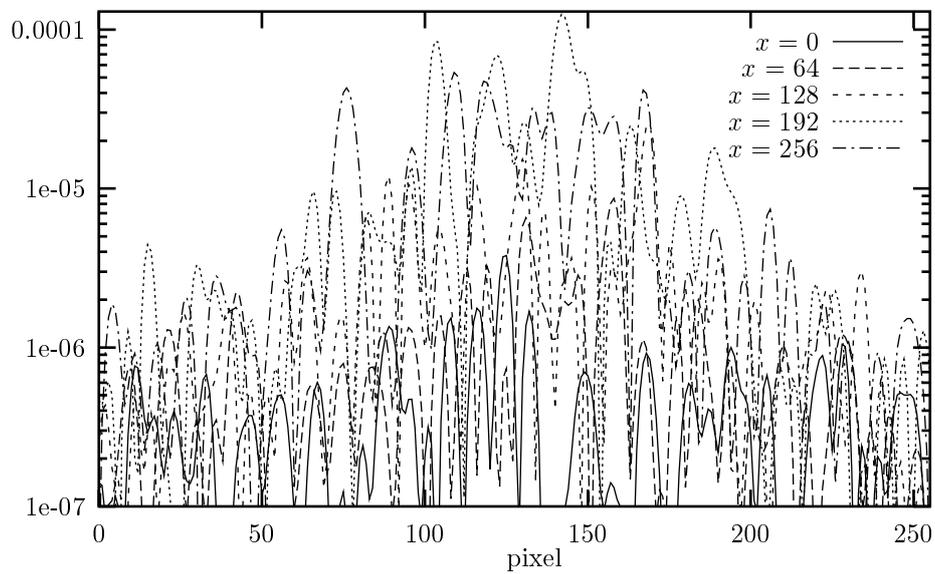


Figura 4.16: Profili PSF nel caso di pupilla da 1.8 m e modello di GREENWOOD. L'immagine è stata ricampionata su un supporto 256×256 .

Effetti di bordo nell'immagine

In questa sezione si analizzerà la discrepanza tra i profili teorici e quelli ottenuti nelle simulazioni visibile nei grafici della sezione precedente. Innanzi tutto notiamo che il parametro importante è la scala dell'immagine S , ovvero il numero di pixel per metro nella campionatura dello schermo di fase. Questa da l'informazione fisica della massima frequenza spaziale campionata, dalla quale possiamo ricavare l'estensione (in secondi d'arco) della zona per la quale la PSF è correttamente rappresentata utilizzando il teorema di NYQUIST³. In verità alcuni autori (vedi [36]) asseriscono che la massima ampiezza correttamente rappresentata è il doppio di quella data dal teorema di NYQUIST, dato che il campionamento viene effettuato solo sulla fase e non sull'ampiezza (posta uguale a 1 nell'approssimazione di near-field). Esprimiamo questa incertezza introducendo il parametro k , che può variare da 1.0 a 2.0. Tenuto conto di ciò, possiamo esprimere il campo massimo riprodotto in secondi d'arco come:

$$F_{\max} = \frac{3600 \cdot 180 \cdot S \cdot \lambda}{k \cdot \pi} \quad (4.19)$$

che da, ponendo $k = 1.5$, un valore di 2.5 e 5.0 secondi d'arco per una scala di 32 e 64 pixel per metro.

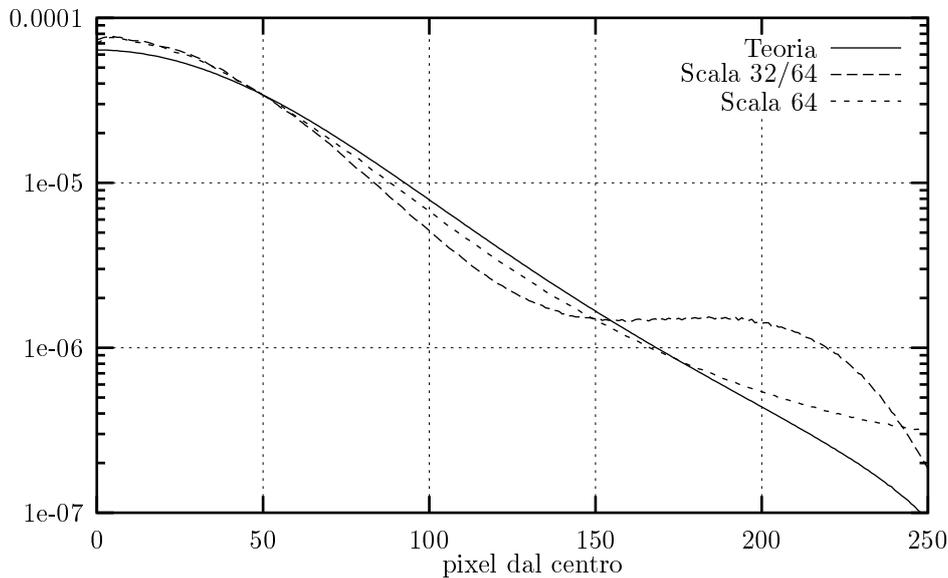


Figura 4.17: Influenza del fattore di scala sulla qualità della riproduzione della long-time PSF. In quest'immagine 255 pixel corrispondono a 6.6 secondi d'arco.

³Questo deriva dal fatto che la PSF è la trasformata di FOURIER discreta della GPF.

Questo risultato è confermato dai risultati presentati in figura 4.17. Qui è rappresentato il profilo della PSF ottenuto da una simulazione a 2 strati perpendicolari, entrambi con $r_0 = 0.1$ m, $L_0 = 10$ m, velocità di scorrimento 10 m/s e dimensione 30 m. Il profilo **Scala 64** è ottenuto campionando lo schermo di fase a 64 pixel per metro e eseguendo i calcoli sul solito supporto 512×512 . Il profilo denominato **Scala 32/64** è ottenuto interpolando linearmente uno schermo di fase campionata a 32 pixel per metro su un supporto 1024×1024 ed eseguendo i calcoli delle PSF su questo. L'immagine è poi ricampionata a 512×512 e ad essa è applicata la media circolare come nella sezione precedente. Si verifica mediante il teorema del campionamento che la scala dell'immagine in uscita (pixel per secondo d'arco) è la stessa, ma la qualità è accettabile solo nel caso in cui abbiamo utilizzato una campionatura più fine dello schermo di fase.

4.5.2 Movimento del centroide della PSF

Nelle figure 4.18, 4.19, 4.20 e 4.21 è rappresentata l'evoluzione temporale del centroide dell'immagine, definito come

$$C_i = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} I_{i,j} i}{\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} I_{i,j}} \quad (4.20)$$

$$C_j = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} I_{i,j} j}{\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} I_{i,j}} \quad (4.21)$$

Osservando l'andamento temporale di questo sono importanti le seguenti annotazioni:

- È necessario correggere il *tip-tilt* dell'immagine vista la notevole escursione della posizione del centroide.
- Nell'immagine è chiaramente presente una componente ad alta frequenza, che non è riproducibile nelle simulazioni a singolo strato (vedi [33]).

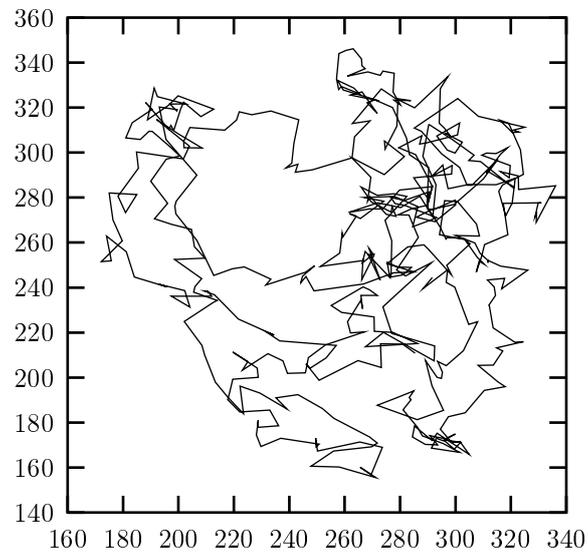


Figura 4.18: Random Walk del centroide nel caso di modello di GREENWOOD.

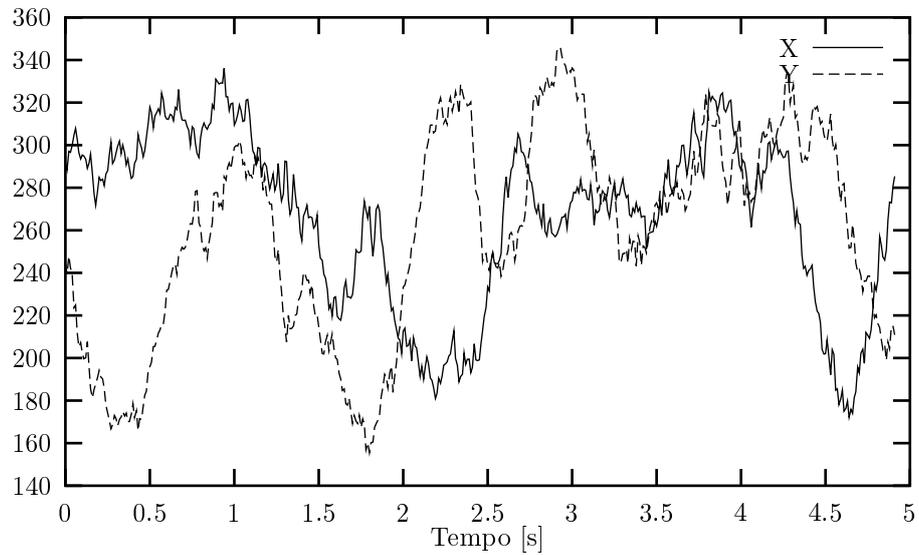


Figura 4.19: Movimento del centroide nel caso di modello di GREENWOOD.

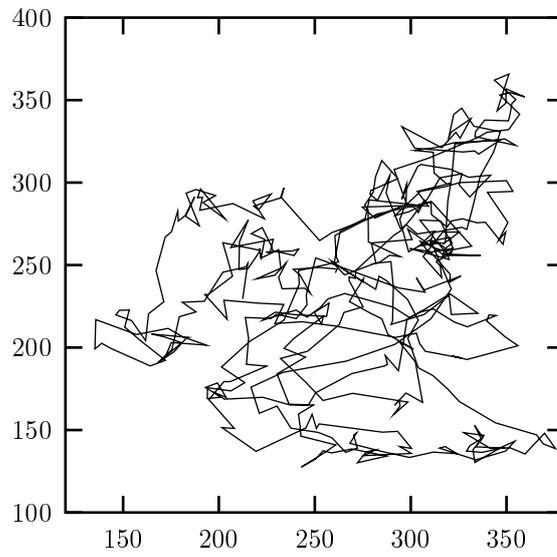


Figura 4.20: Random Walk del centroide nel caso di modello SLC-N.

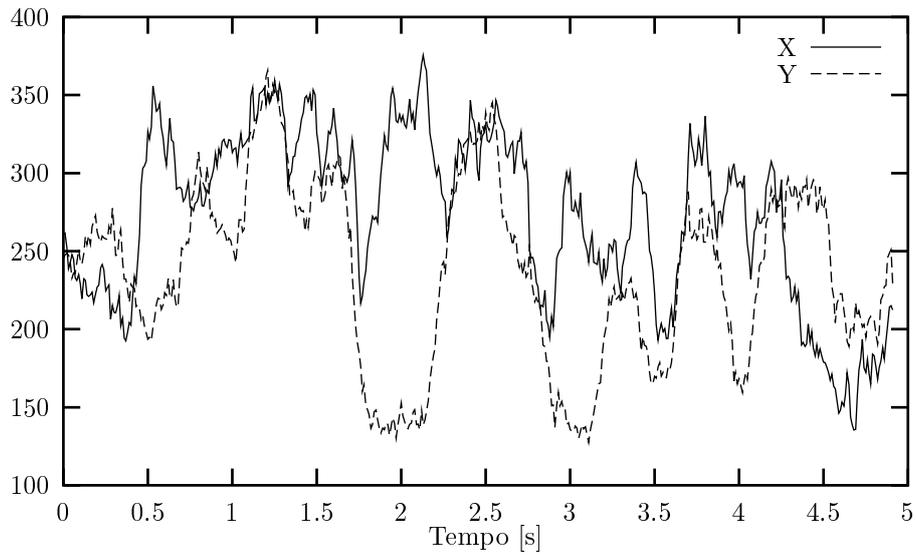


Figura 4.21: Movimento del centroide nel caso di modello SLC-N.

4.5.3 *Boiling time* delle speckles

Il *boiling time* è il tempo di vita delle speckles. Per investigare questo importante parametro è stata svolta una simulazione con un passo di 1.5 milisecondi, l'intervallo temporale minimo per il quale si ha un effettivo cambiamento della GPF per una velocità di scorrimento di 20 m/s per lo strato superiore. Per valutare la variazione tra un'immagine e la seguente, definiamo la differenza RMS⁴ Δ^{RMS} come la varianza della differenza (in senso matriciale) delle 2 immagini \mathbf{A} e \mathbf{B} :

$$\Delta_{\mathbf{A},\mathbf{B}}^{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} (\mathbf{A}_{i,j} - \mathbf{B}_{i,j})^2} \quad (4.22)$$

In questo caso analizzeremo la funzione $\Delta_{\mathbf{A}(t),\mathbf{B}(t+\tau)}^{\text{RMS}}(\tau)$ in funzione della differenza temporale τ tra la generazione delle 2 immagini (da ora in poi ometteremo, per semplicità, gli indici non essenziali).

Assumendo, com'è plausibile, che per un tempo τ abbastanza lungo le immagini siano completamente scorrelate, possiamo normalizzare $\Delta^{\text{RMS}}(\tau)$ dividendolo per il suo valore massimo raggiunto quando $\tau \gg 0.01$ s. In questo caso possiamo esprimere il valore di $\Delta^{\text{RMS}}(\tau)$ in percentuale. Le figure 4.22 e 4.23 sono il risultato della media di 30 realizzazioni della simulazione nei casi di modello a strati rispettivamente di GREENWOOD e SLC-N. La curva interpolante è una *spline naturale approssimata* con pesi uguali per ogni punto sperimentale.

Definendo il boiling time come il tempo τ per il quale la funzione $\Delta^{\text{RMS}}(\tau)$ vale 63.3% otteniamo $\tau_{\text{GW}} = 9.4$ ms nel caso GREENWOOD e $\tau_{\text{SN}} = 8.2$ ms nel caso SLC-N. Compariamo brevemente questi risultati con le misure sperimentali ottenute nelle campagne di determinazione del seeing del ESO a La Silla, Cile (τ_e , τ_{e1} , τ_{e2} - vedi [34]) e del La Palma Observatory, Isole Canarie (τ_{SI} , τ_{AO} - vedi [35]). I risultati sono riportati in tabella 4.2. Più precisamente τ_e si riferisce ad una misura diretta del boiling time con tecniche interferometriche, τ_{e1} e τ_{e2} si riferiscono a tempi ottenuti mediante 2 diversi modelli analitici dalle misure dei profili di $C_n^2(h)$. τ_{SI} e τ_{AO} derivano da modelli analitici che elaborano i valori di $C_n^2(h)$ effettivamente misurati.

È importante notare che quelle presentate sono medie di osservazioni fatte in diversi giorni. I valori ottenuti nelle singole osservazioni presentano un'ampia dispersione. Ciò è dovuto all'intrinseca variabilità dei parametri che generano la turbolenza atmosfera. Comunque si nota dalla tabella che i tempi di vita delle speckles sono inferiori nelle simulazioni che nella maggior parte delle misure. Confrontando i dati in entrata alla simulazione con i risultati delle misurazioni delle sonde atmosferiche riportati negli articoli sopra citati, sembra che la fonte della discrepanza sia da attribuire alla

⁴Root Mean Square, riferito al modo di calcolare il valore medio della differenza tra immagini.

τ_{GW}	τ_{SN}	τ_e	τ_{e1}	τ_{e2}	τ_{SI}	τ_{AO}
9.4	8.2	16.9	12.4	9.5	12.9	6.6

Tabella 4.2: Confronto tra i *boiling time* ottenuti dai 2 modelli simulati e le medie di varie giornate osservative delle misurazioni ottenute in 2 campagne per la determinazione del seeing. Il confronto è solo indicativo, dato che la dispersione delle misure è ampia per la notevole variabilità delle condizioni che determinano il seeing. I tempi sono in millisecondi.

velocità dei venti nell’alta atmosfera. Le misurazioni dalla sonda indicano che in condizioni di seeing ottimale la velocità del vento non è mai sopra i 10 m/s, mentre nella simulazione si è usato, riferendosi alle tabelle standard dei parametri geofisici, una velocità massima di 20 m/s.

4.5.4 Campo di isoplanatismo della PSF

In questo caso è stata usata la stessa tecnica della sezione precedente per stimare il campo di isoplanatismo. In questo caso abbiamo studiato la funzione $\Delta_{\mathbf{A}(\psi), \mathbf{B}(\psi+\theta)}^{\text{RMS}}(\theta)$, dove θ è lo spostamento angolare tra la direzione usata per ricavare la GPF dalla quale calcoliamo l’immagine della PSF (vedi figura 3.2). I risultati sono riportati nelle figure 4.24 e 4.25 e sono la media di 100 realizzazioni. Definiamo, come in precedenza, il campo di isoplanatismo quello per il quale $\Delta^{\text{RMS}}(\theta)$ raggiunge il valore del 63.3%.

θ_{GW}	θ_{SN}	θ_{D}	θ_{C}	θ_{SI}	θ_{AO}	θ_{R}
3.3	3.8	3.6	2.5	2.2	1.3	≈ 4

Tabella 4.3: Confronto tra gli angoli di isoplanatismo ottenuti dai 2 modelli simulati e le medie di varie giornate osservative delle misurazioni ottenute in 2 campagne per la determinazione del seeing. Il confronto può solo essere indicativo, data l’ampia dispersione delle misure e vista la variabilità delle condizioni che determinano il seeing. Gli angoli sono in secondi d’arco.

Anche in questo caso possiamo confrontare i risultati ottenuti con quelli delle campagne osservative citate a pagina 57. Chiaramente valgono gli stessi limiti dovuti all’estrema differenza delle condizioni che generano la turbolenza atmosferica nelle diverse serate osservative e quindi allo stesso concetto di “valore medio”. Nella tabella 4.3 θ_{GW} e θ_{SN} indicano i risultati delle simulazioni per di GREENWOOD e SLC-N, θ_{D} e θ_{C} indicano il campo di isoplanatismo direttamente misurato per via interferometrica e calcolato dai dati sui profili di turbolenza misurati tramite sonda dall’osservatorio di La Silla e infine θ_{SI} e θ_{AO} sono ricavati tramite modelli analitici dalla misurazione del profilo di turbolenza all’osservatorio di La Palma. Inoltre

θ_R si riferisce al valore medio dell'angolo di isoplanatismo presentato ricavato da RODDIER in [28]. Se escludiamo i dati di La Palma, abbiamo una buona corrispondenza tra le simulazioni e i dati sperimentali.

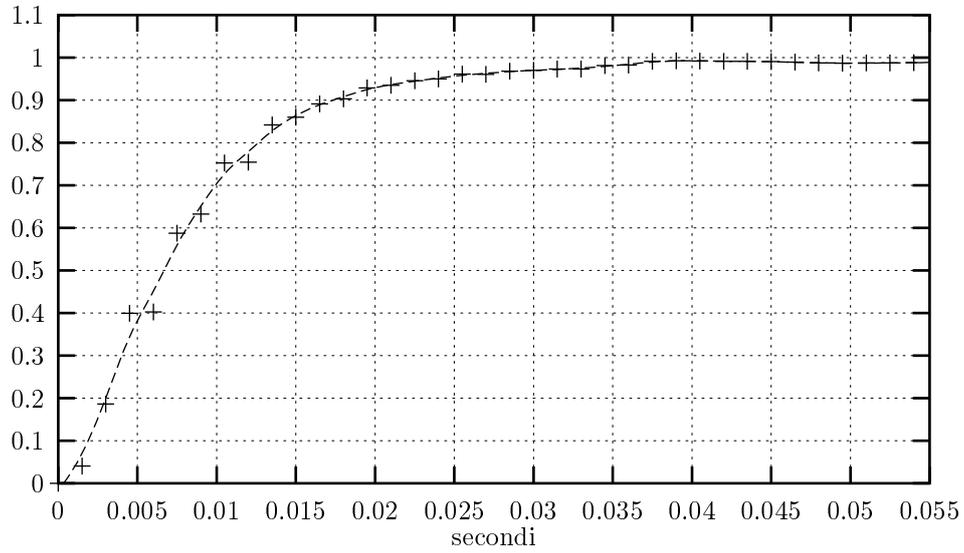


Figura 4.22: Tempo di vita (*boiling time*) delle speckles. Modello a strati di GREENWOOD.

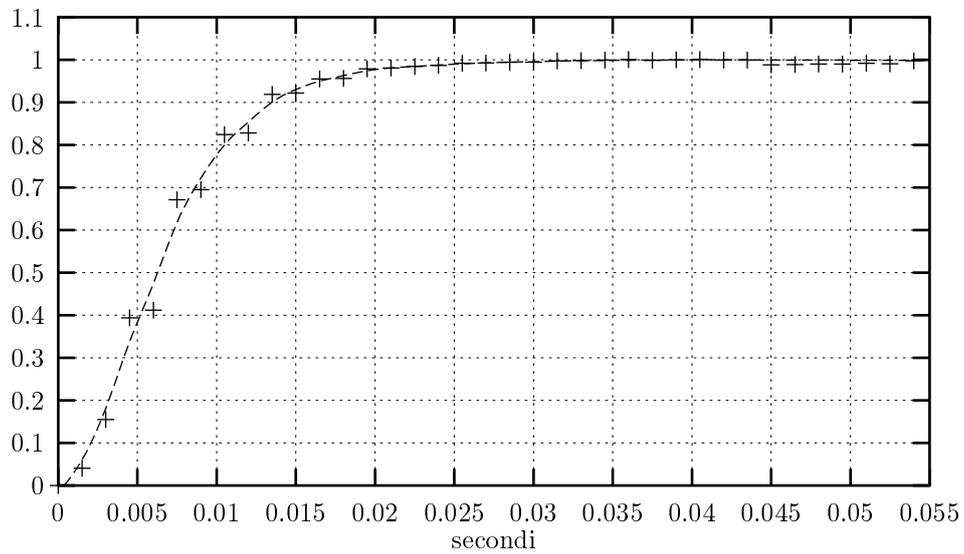


Figura 4.23: Tempo di vita (*boiling time*) delle speckles. Modello a strati SLC-N.

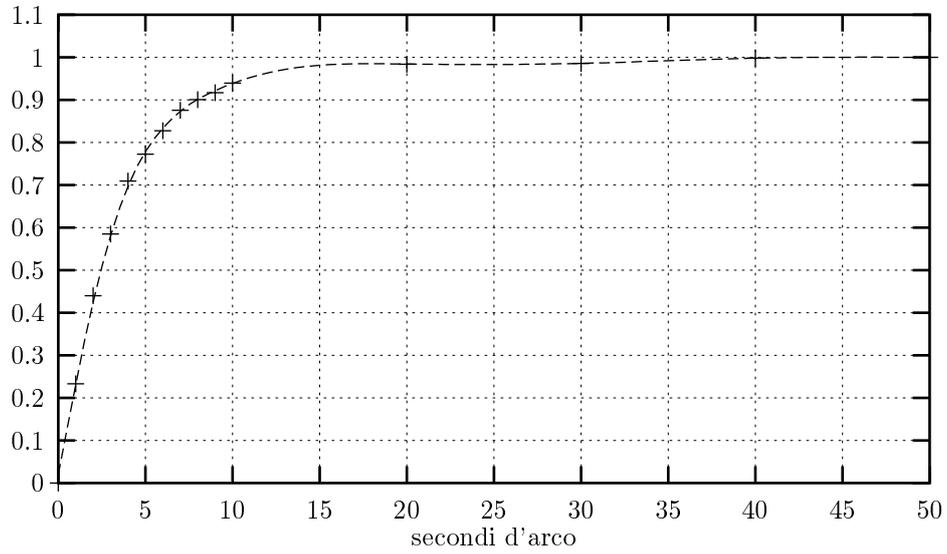


Figura 4.24: Campo di isoplanatismo nel caso di modello di GREENWOOD

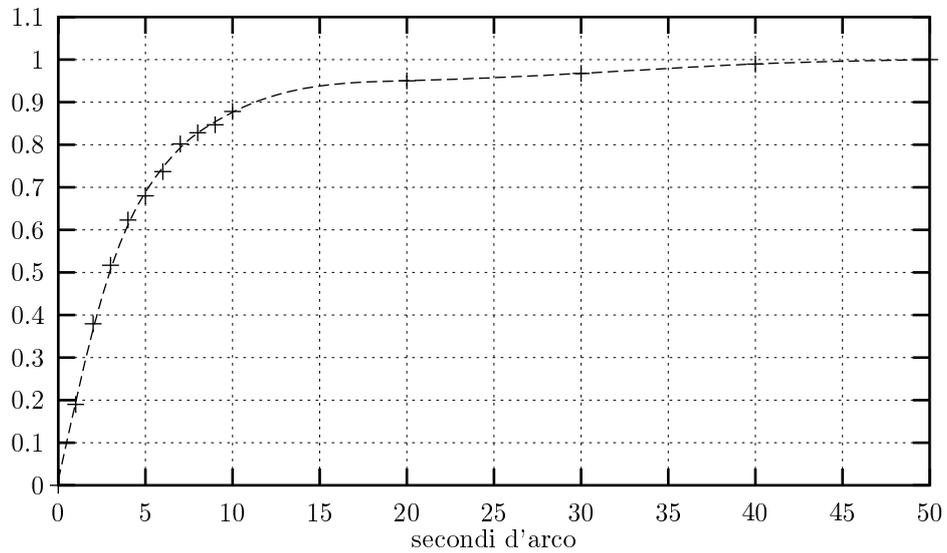


Figura 4.25: Campo di isoplanatismo nel caso di modello di SLC-N

4.5.5 Forma della PSF per esposizioni brevi

Nelle figure 4.26, 4.27, 4.28 e 4.29 sono presentate immagini di PSF (o per meglio dire, di immagini di stelle perfettamente puntiformi) per diversi diametri della pupilla e magnitudini.

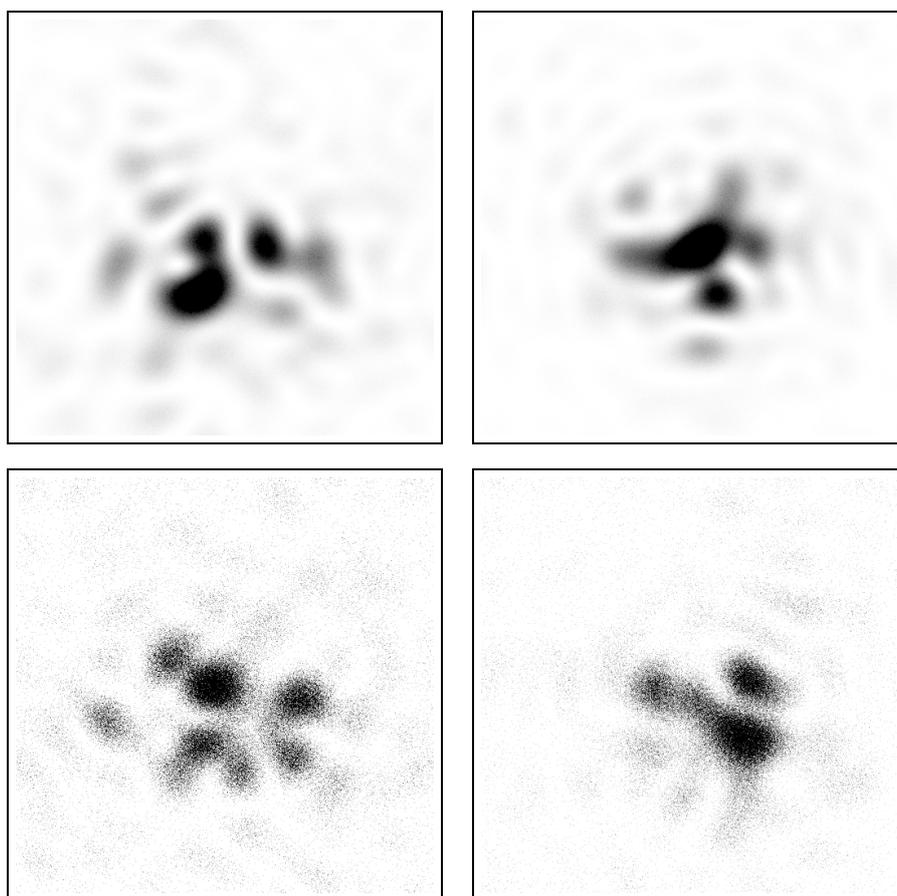


Figura 4.26: Immagini a breve esposizione di una sorgente puntiforme nel caso dei modelli GREENWOOD (sinistra) e SLC-N (destra). Magnitudine dell'oggetto 0 (sopra) e 5 (sotto), pupilla da 40 cm

Se teniamo conto dell'approccio interferometrico alla formazione dell'immagine (vedi sezione 2.3.3) possiamo prevedere che il numero di speckles presenti nell'immagine è:

$$N_S \propto \left(\frac{D}{r_0}\right)^2 \quad (4.23)$$

dove D è il diametro della pupilla e r_0 è la lunghezza di coerenza. Nel nostro caso di simulazione pluristrato è più difficile dare un significato preciso a r_0 ,

ma, in prima approssimazione, possiamo considerarlo come la risultante dei parametri di FRIED dei singoli strati (vedi equazione 4.18).

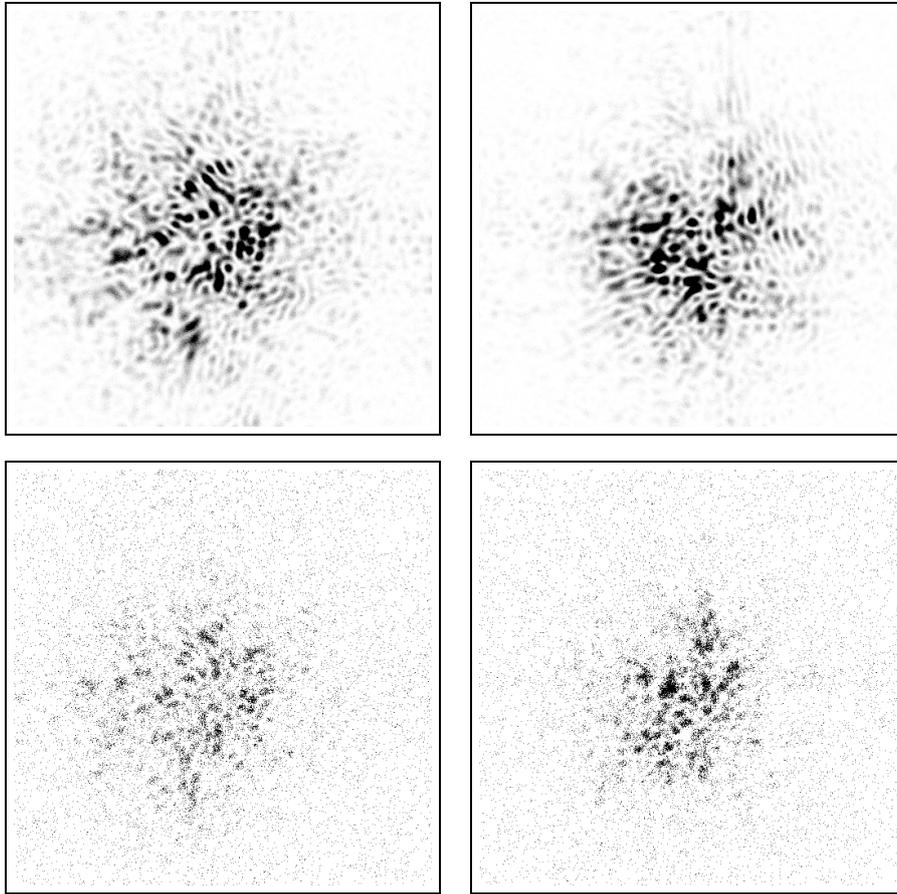


Figura 4.27: Immagini a breve esposizione di una sorgente puntiforme nel caso dei modelli GREENWOOD (sinistra) e SLC-N (destra). Magnitudine dell'oggetto 5 (sopra) e 10 (sotto), pupilla da 180 cm

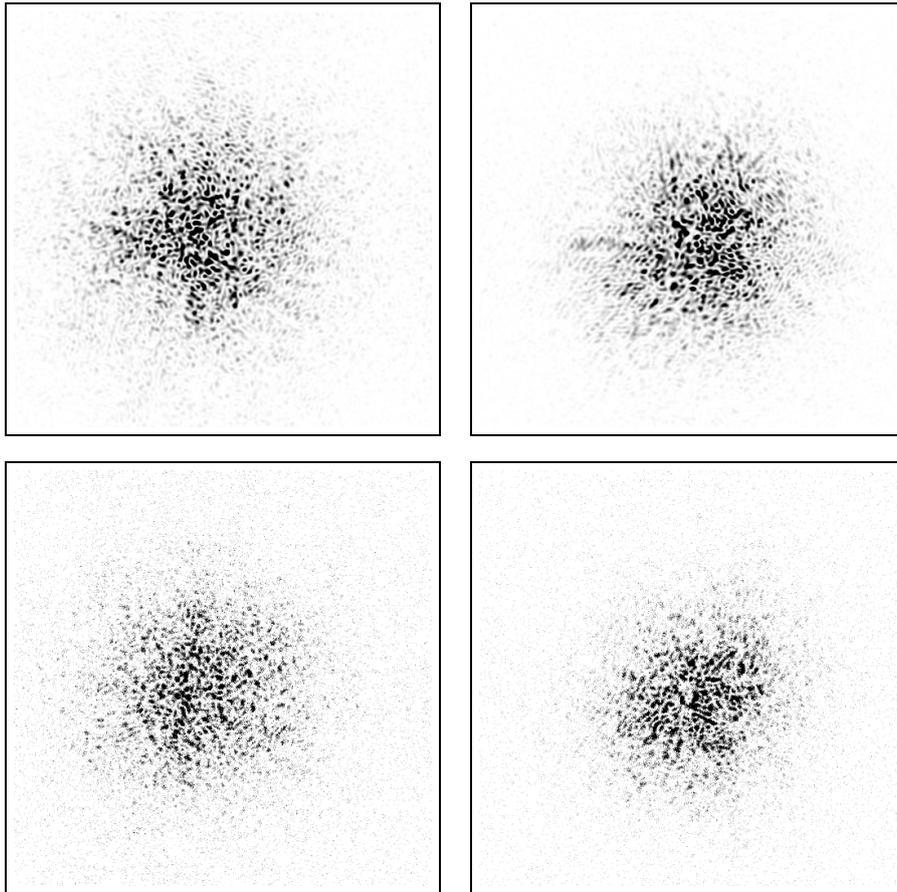


Figura 4.28: Immagini a breve esposizione di una sorgente puntiforme nel caso dei modelli GREENWOOD (sinistra) e SLC-N (destra). Magnitudine dell'oggetto 5 (sopra) e 10 (sotto), pupilla da 350 cm

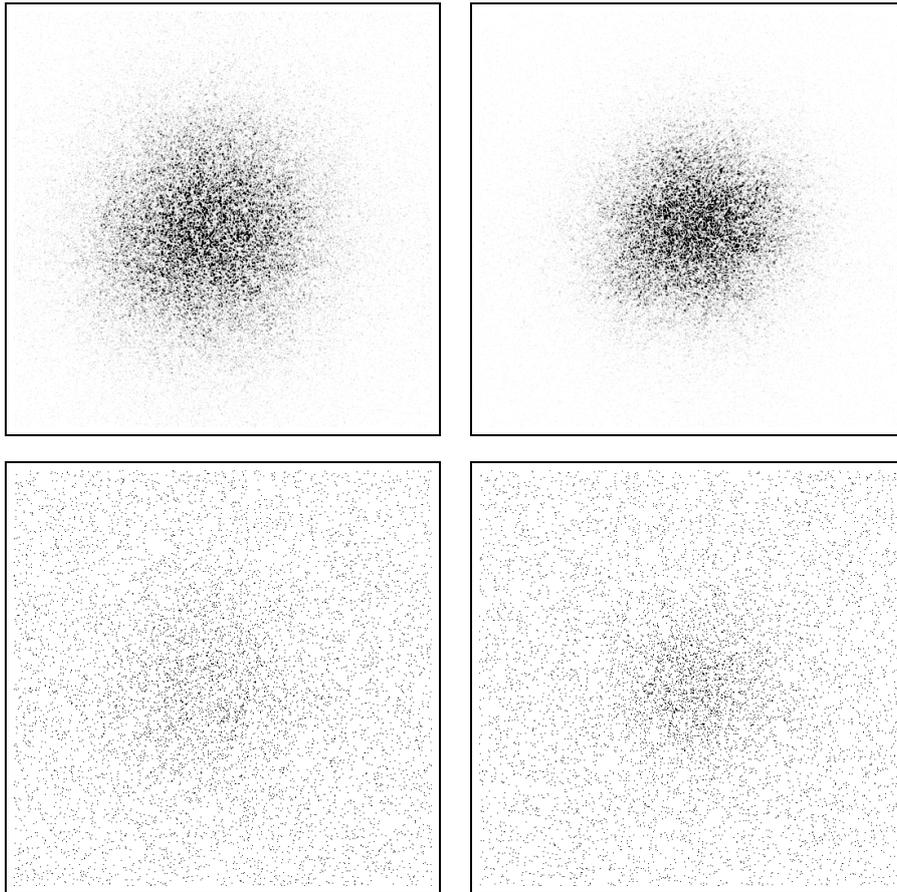


Figura 4.29: Immagini a breve esposizione di una sorgente puntiforme nel caso dei modelli GREENWOOD (sinistra) e SLC-N (destra). Magnitudine dell'oggetto 10 (sopra) e 15 (sotto), pupilla da 800 cm

4.6 Proprietà dell'immagine

L'immagine a lungo periodo di esposizione perde inevitabilmente l'informazione contenuta alle alte frequenza spaziali. Il risultato finale è una macchietta indistinta con un diametro di circa 1 secondo d'arco. Se vogliamo sperare di compensare l'effetto dell'atmosfera dobbiamo quindi lavorare sull'immagine ottenuta con un breve periodo di esposizione dell'ordine di 1 centesimo di secondo.

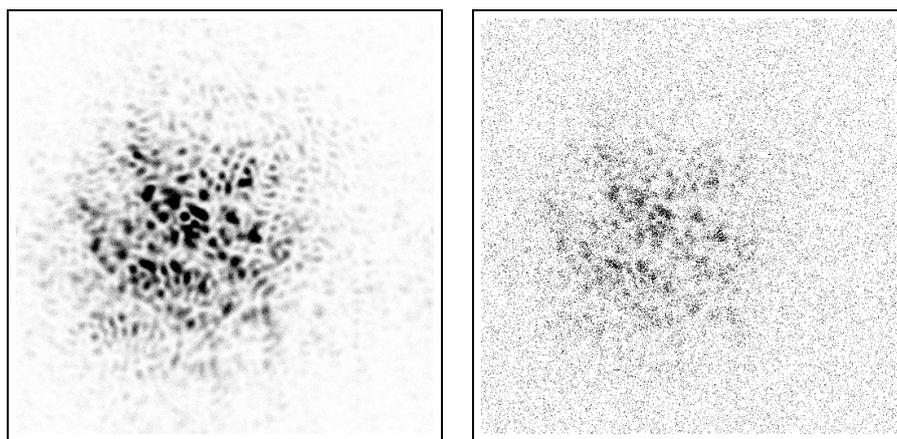


Figura 4.30: Immagini a breve esposizione di una stella doppia con separazione di 0.64 secondi d'arco e componente secondaria con una luminosità del 50% rispetto alla primaria (vedi sezione 4.2.1). Modello GREENWOOD. Magnitudine dell'oggetto 5 (sinistra) e 10 (destra). Pupilla da 180 cm

Possiamo vedere esempi di immagini con tempi di posa di 1 centesimo di secondo nelle figure 4.30, 4.31 e 4.32. Il diametro della pupilla simulata è 1.8 m e le magnitudini degli oggetti sono la quinta o la decima. Nelle tre figure sono state simulati i 3 tipi di oggetti già illustrati: stella doppia, stella doppia immersa in un halo e oggetto complesso. È chiaramente visibile l'effetto del basso numero di fotoni presenti nell'immagine visto il breve tempo di posa. Rispetto alle immagini della sorgente puntiforme (PSF) possiamo distinguere 2 diversi regimi che caratterizzano la formazione dell'immagine:

- Per oggetti con componenti ben staccate (stella doppia, figura 4.30) si ha una chiara formazione di speckles, anche se molto degradate dal basso rapporto segnale su rumore. Anche nel caso di halo si distingue abbastanza chiaramente la struttura a speckle se la luminosità dell'oggetto è abbastanza alta (figura 4.31, immagine a sinistra).
- Nel caso di oggetto troppo complesso non si ha formazione delle spec-

kles (figura 4.31). Lo stesso vale per il caso di stella doppia con halo se la luminosità totale non è abbastanza elevata.

Questa distinzione è molto importante in fase di valutazione della capacità di ricostruire l'immagine iniziale, come vedremo nei prossimi capitoli.

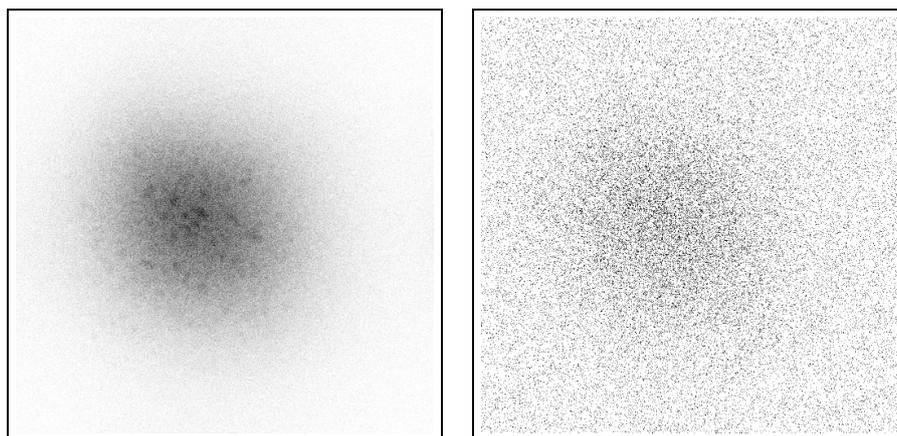


Figura 4.31: Immagini a breve esposizione di una stella doppia con separazione di 0.64 secondi d'arco e componente secondaria con una luminosità del 50% rispetto alla primaria immersa in un halo con diametro 0.50 secondi d'arco e intensità un centesimo rispetto alla stella. (vedi sezione 4.2.1). Modello GREENWOOD. Magnitudine dell'oggetto 5 (sinistra) e 10 (destra). Pupilla da 180 cm

Nelle figure 4.33 e 4.34 possiamo vedere l'integrazione di spettri di potenza di immagini a breve tempo di esposizione. Da queste figure possiamo trarre le seguenti conclusioni:

- Le componenti spettrali sono ancora presenti nell'immagine ricavata attraverso l'atmosfera. Il passaggio nella zona di turbolenza provoca un'alterazione del modulo e della fase delle singole componenti⁵. Utilizzando le nostre conoscenze del tipo di alterazione provocato dal seeing possiamo sperare di compensarne i difetti.
- Il caso di oggetto complesso è molto delicato. L'energia è distribuita su una ampia banda di frequenze e quindi è più difficile lavorare con le componenti per le quali il rapporto segnale su rumore è molto basso.

⁵L'alterazione della fase è ovviamente invisibile nelle figure 4.33 e 4.34.

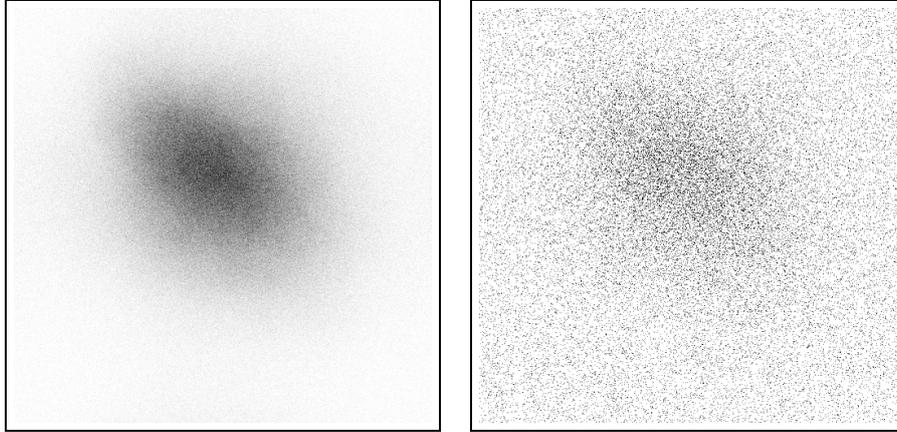


Figura 4.32: *Imaging* a breve periodo del oggetto naturale di pagina 40. Modello GREENWOOD. Magnitudine dell'oggetto 5 (sinistra) e 10 (destra). Pupilla da 180 cm

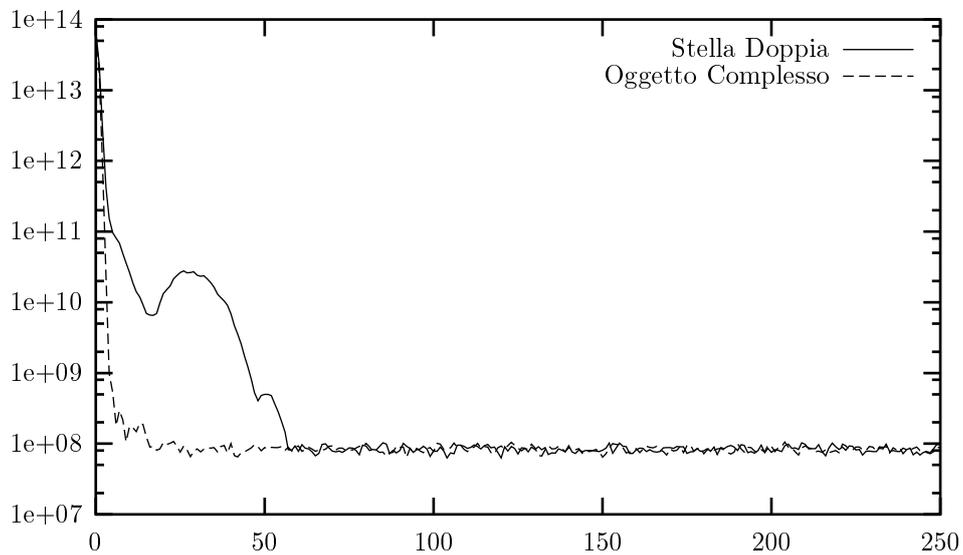


Figura 4.33: Media di 100 spettri di potenza di immagini a breve tempo di esposizione per una pupilla da 180 cm. Il grafico è la sezione sull'asse x dello spettro. La magnitudine integrata degli oggetti è la sesta.

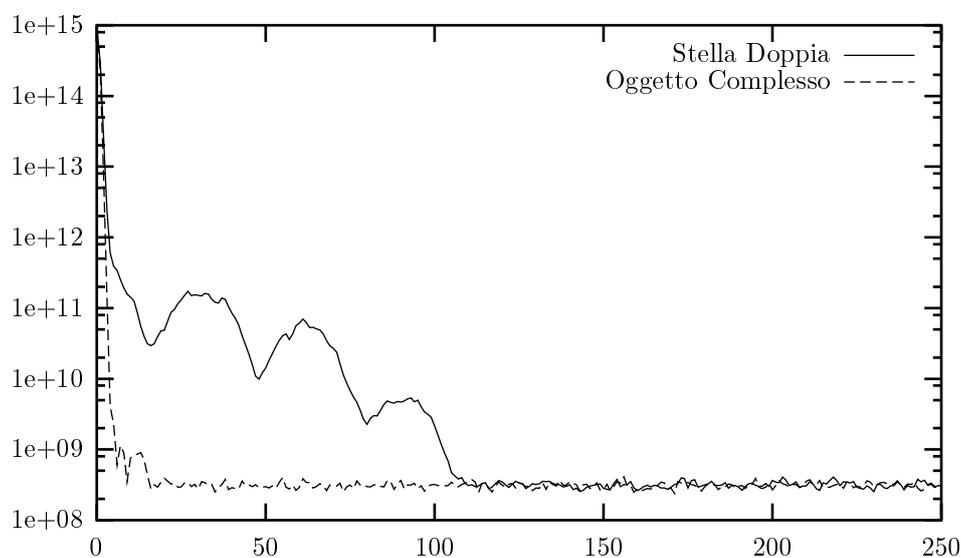


Figura 4.34: Media di 100 spettri di potenza di immagini a breve tempo di esposizione per una pupilla da 350 cm. Il grafico è la sezione sull'asse x dello spettro. La magnitudine integrata degli oggetti è la sesta.

4.7 Riepilogo del lavoro svolto

In questo capitolo sono presentati i risultati nello studio del *seeing* ottenuti utilizzando il software di simulazione sviluppato. Tra gli altri parametri sono stati ricavati l'angolo di isoplanatismo e il tempo di vita delle *speckles*. Inoltre è stato analizzato il profilo dell'immagine di *seeing* e la forma assunta dall'immagine di oggetti astronomici di varia natura (stella singola, stella doppia e oggetto esteso) per esposizioni brevi. Il lavoro svolto ha una duplice funzione:

- Ci permette di controllare l'accuratezza del simulatore confrontandone i risultati con le previsioni teoriche, quando disponibili, e, soprattutto, con i risultati sperimentali.
- Ci dà una serie di importanti parametri, non ricavabili per via analitica, che ci permettono di progettare in modo efficiente le tecniche di recupero dell'immagine. Il tempo di vita delle *speckles* determina la durata massima dell'esposizione per "congelare" la turbolenza atmosferica. Il campo di isoplanatismo è importante nel determinare i risultati che ci possiamo aspettare dalle tecniche di compensazione a PSF nota. La particolare forma dell'immagine "a macchie" è alla base del funzionamento della tecnica SAA.

Capitolo 5

Tecniche di compensazione del seeing a PSF nota

Una tecnica per correggere le aberrazioni indotte dall'atmosfera, se si conosce l'effetto di questa, quantificato mediante la PSF, è di applicare, in base a questa informazione, un'opportuna correzione. Le modalità attualmente in uso per ottenere ciò sono le seguenti:

Ottica Adattiva. Consiste nel costruire dei sistemi che mediante deformazioni meccaniche e/o movimenti delle ottiche introducono uno sfasamento dell'onda luminosa incidente tale da correggere l'effetto dell'atmosfera. Le problematiche inerenti a questi sistemi saranno brevemente accennate nella sezione 5.1.3.

Post-processing. Consiste nel deconvolvere l'immagine rilevata mediante tecniche numeriche. Possiamo distinguere 2 categorie di metodi utilizzati:

Analisi On-Line. La deconvoluzione viene effettuata in tempo reale mentre avviene l'acquisizione. Per questo è necessaria una notevole potenza di calcolo e comunque dobbiamo limitarci ad algoritmi di deconvoluzione relativamente semplici. In questa categoria trovano spazio le architetture dedicate tipo processori DSP.

Analisi Off-Line. I dati acquisiti vengono memorizzati ed elaborati in un secondo momento. Chiaramente in questo caso la quantità di dati in uscita è molto grande, vista la necessità di campionare le immagini con una frequenza di 100 Hz.

Sistemi Ibridi. Come sarà mostrato nella sezione 5.1.3 è conveniente effettuare almeno certe correzioni (*tip-tilt*) utilizzando tecniche di ottica adattiva anche se si intende lasciare il grosso del lavoro ad un sistema di elaborazione in post-processing.

5.1 Metodi per ricavare la PSF

5.1.1 Stelle di riferimento naturali

Il modo più ovvio per ottenere una PSF di riferimento per effettuare la deconvoluzione è utilizzare l'immagine di una stella naturale di magnitudine adeguata nel campo di isoplanatismo dell'oggetto osservato. Purtroppo questo campo è molto limitato (vedi sezione 4.5.4) e quindi è difficile trovarvi una stella adatta.

Prendiamo come esempio i risultati ottenuti da RAGAZZONI ([18]). Nel caso di telescopio guida da 1 m, la magnitudine limite della stella di riferimento per recuperare l'informazione di tip-tilt è 12.8. La distribuzione della minima distanza d di una stella con magnitudine massima m per un oggetto astronomico scelto casualmente è approssimativamente Poissoniana con media:

$$\langle d \rangle = \frac{1}{2\sqrt{n}} \quad (5.1)$$

dove n è la densità di stelle di magnitudine non superiore a m . Nel caso di $m = 12.8$ abbiamo, per il caso del polo nord galattico, quindi nel caso peggiore, $n = 30 \text{ deg}^{-1}$. Sotto queste condizioni si ha $d = 5 \text{ arcmin}$. Adesso è chiara la difficoltà di trovare un'adeguata stella di riferimento nel campo di isoplanatismo.

5.1.2 Stelle di riferimento artificiali

Una soluzione al problema esposto sopra è di "creare" una stella artificiale vicino all'oggetto osservato. Le tecnologie proposte a questo scopo sono essenzialmente 2:

- L'utilizzo di laser per produrre una stella artificiale nell'atmosfera.
- L'utilizzo di satelliti artificiali in orbite adeguate come fari orbitanti. È abbastanza facile capire il costo esorbitante di un tale progetto, che quindi non ha ricevuto molta attenzione.

Ci sono 2 metodi per ottenere una stella artificiale al laser:

- utilizzando lo scattering RAYLEIGH nella stratosfera (10-20 km),
- utilizzando la fluorescenza degli atomi di sodio nella mesosfera ($\approx 90 \text{ km}$).

Il vantaggio del primo metodo è la possibilità di utilizzare laser commerciali, mentre per il secondo è necessaria una potenza ben maggiore vista l'altezza dello strato atmosferico illuminato.

Oltre alle difficoltà tecnologiche, le stelle artificiali al laser soffrono di 2 importanti problemi concettuali:

- Dato che durante il percorso di salita il raggio laser è comunque soggetto alla turbolenza atmosferica, non è possibile determinare la posizione precisa dello *spot*. Questo ci impedisce di utilizzare la stella artificiale per correggere direttamente la componente di *tip-tilt* dell'oggetto osservato (vedi sezione 5.1.3).
- Essendo la stella artificiale così ottenuta ad un'altezza finita¹, il fronte d'onda proveniente da essa ha una forma sferica. Questa aberrazione è detta anisoplanatismo del fuoco. L'effetto è abbastanza rilevante da far preferire le stelle artificiali al sodio, nonostante i maggiori costi associati alla loro produzione.

5.1.3 Cenni all'ottica adattiva

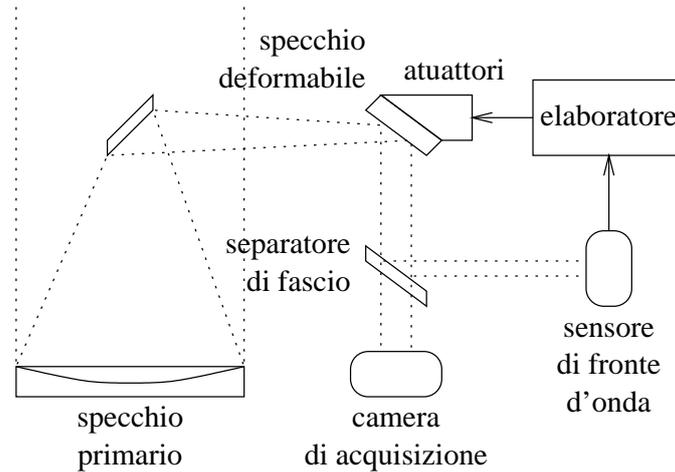


Figura 5.1: Schema a blocchi di un sistema ad ottica adattiva

Lo schema di massima di un telescopio ad ottica adattiva è illustrato in figura 5.1. Il divisore di fascio provvede a illuminare un sensore di fronte d'onda. Questo serve a ricostruire dall'immagine della stella di riferimento il valore dello sfasamento introdotto dalla turbolenza atmosferica. A sua volta questa informazione serve a pilotare gli attuatori dello specchio deformabile in modo da annullare l'effetto di questo sfasamento.

La validità di questo schema viene ridotta dai seguenti fattori:

- Il rumore associato al numero finito di fotoni che raggiungono il sensore di fronte d'onda.

¹Ed inoltre non determinabile con assoluta precisione; in caso contrario si potrebbe correggere *a posteriori* l'effetto.

- L'anisoplanatismo tra oggetto di riferimento e sorgente studiata. Questo può essere sia angolare (nel caso di oggetto di riferimento celeste) o di fuoco (nel caso di stella artificiale).
- Il campionamento finito introdotto dal sensore di fronte d'onda.
- Il numero finito di gradi di libertà dello specchio deformabile.
- Il tempo di risposta del sistema, dovuto al tempo di elaborazione del sistema di pilotaggio dell'attuatore e al tempo di risposta meccanica dello specchio deformabile.

Importanza del *tip-tilt*

Dai grafici presentati a pagina 55 e seguenti, vediamo come il centroide dell'immagine compie, nel corso di una serie osservativa, un notevole moto di carattere casuale. L'escursione massima di questo è di circa $\pm 0.6''$. L'importanza della correzione di tip-tilt è confermata anche dallo sviluppo in serie di polinomi di ZERNIKE della fase del fronte d'onda incidente. Come mostrato in [36], l'86 % dell'energia si trova nei termini di tip-tilt dello sviluppo.

Un metodo per stimare il tip-tilt è calcolare l'offset del centroide dell'immagine rilevata. Questa è ovviamente solo una stima che diventa sempre meno accurata al diminuire del numero di fotoni incidenti sulla singola immagine. In compenso il metodo per il calcolo del centroide dell'immagine è assai semplice e non implica grandi necessità di potenza di calcolo.

Nei sistemi di correzione del seeing è necessario rimuovere immediatamente almeno il tip-tilt mediante uno specchietto piano mobile su 2 assi controllato dalla posizione del centroide nell'immagine osservata. Alternativamente sono utilizzabili le cosiddette CCD a scorrimento ortogonale. Queste sono del tutto simili alle normali CCD, ma hanno in più la capacità di muovere l'immagine di carica su entrambi gli assi.

Come già detto, la determinazione diretta del tip-tilt utilizzando una stella di riferimento artificiale non è possibile. In alternativa esistono vari modi (vedi [22]) per recuperare queste informazioni ricorrendo a effetti di secondo ordine. Nonostante ciò non è ancora unanimemente accettato il modo migliore per misurare il tip-tilt.

Selezione di immagini

È stato dimostrato da FRIED che la probabilità di ottenere un'esposizione breve *diffraction-limited* è non nulla. In pratica, ovvero per telescopi con diametro molto maggiore di r_0 , questa probabilità è molto piccola e quindi, vista la bassa luminosità degli oggetti astronomici, non è pensabile una tecnica di correzione del seeing in cui semplicemente si aspetta l'immagine di buona qualità.

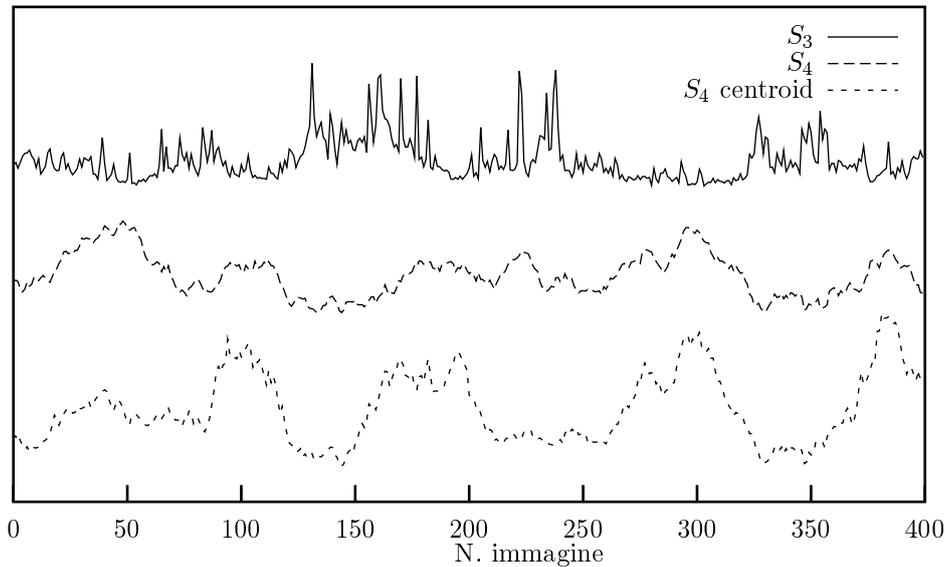


Figura 5.2: Confronto dell'andamento delle funzioni di SHARPNESS S_3 , S_4 e S_4 applicata all'immagine ricentrata. L'oggetto è una stella di magnitudine 9, mentre la pupilla è di 1.8 metri. Si nota la notevole discrepanza nell'andamento delle 3 funzioni.

Comunque l'idea di preselezionare le esposizioni di buona qualità può avere un impatto positivo sul risultato finale di altre tecniche di correzione del seeing. Per giudicare la qualità delle singole esposizioni possono essere utilizzate le funzioni di *sharpness*. Nella figura 5.2 è mostrata l'evoluzione temporale di 2 di queste per una tipica simulazione. In [20] è presentato uno studio dell'utilità di un otturatore veloce da applicare al Telescopio Nazionale Galileo. Nella sezione 6.5 verranno utilizzate le funzioni di SHARPNESS per migliorare la qualità di ricostruzione dell'immagine utilizzando la SAA.

5.2 Metodi di deconvoluzione classici

Una volta conosciuta la PSF e l'immagine rilevata bisogna invertire l'equazione di convoluzione (la 3.36) per ottenere l'immagine originale. Non è possibile invertire direttamente questa equazione, dato che per certe frequenze spaziali la PSF vale 0. Fisicamente ciò equivale a dire che il sistema telescopio+atmosfera ha effettivamente perso l'informazione corrispondente a tali frequenze.

In realtà è possibile, almeno in via di principio, recuperare anche le frequenze spaziali per le quali la PSF vale 0. Il ragionamento matematico che sta alla base di ciò (vedi [9] per un'esposizione più completa) è il seguente.

Si dimostra che la trasformata di FOURIER di una funzione a supporto finito è analitica. Il teorema di prolungamento della funzione analitica ci dice che allora è sufficiente conoscere il valore di questa su un disco finito per poterla estendere in modo univoco su tutto il dominio². Quindi se conosciamo la risposta del sistema per certe frequenze spaziali è concettualmente possibile estenderla a tutte. Il problema fondamentale in questo schema è l'impossibilità di conoscere la PSF e l'immagine in uscita con assoluta precisione, visto il rapporto segnale su rumore comunque finito³. In pratica non esistono algoritmi basati sull'uso diretto del prolungamento per serie della PSF funzionanti per il caso astronomico (il SNR è di norma molto basso per oggetti celesti), ma questo ragionamento ci fornisce un utile strumento per capire il funzionamento degli algoritmi di convoluzione.

Di seguito vedremo un metodo di deconvoluzione lineare (metodo di FOURIER-WIENER) e uno non lineare (metodo di RICHARDSON-LUCY). Il vantaggio concettuale della prima categoria è di essere ben capita e trattabile in modo rigoroso dal punto di vista matematico. La seconda invece dà risultati migliori visto che:

- Permette di imporre vincoli fisici al risultato (nel caso RICHARDSON-LUCY la non-negatività dell'immagine deconvoluta, come deve essere per il risultato di un conteggio di fotoni),
- Introduce nuove frequenze nel risultato tramite operazioni matematiche non lineari; i vincoli imposti dall'equazione di convoluzione e dagli eventuali vincoli fisici fanno sì che queste frequenze modellino correttamente la parte di spettro persa dal sistema – tutto questo avviene nell'ambito del ragionamento sopra enunciato.

5.2.1 Deconvoluzione lineare: metodo di Fourier-Wiener

Il metodo di FOURIER-WIENER è basato sull'uso di un filtro di risposta spaziale $y(x, y)$ e in frequenza $Y(f_x, f_y)$ che effettua l'operazione di deconvoluzione. Il filtro è scelto in modo tale da essere ottimale, ovvero in modo tale da minimizzare l'espressione

$$\left\langle \int (y * (h * o + n) - o)^2 dx dy \right\rangle \quad (5.2)$$

In questa espressione $o(x, y)$ è l'oggetto osservato, $h(x, y)$ la PSF e $n(x, y)$ il rumore. Come è chiaro dall'espressione il rumore è assunto additivo. Si

²In realtà la funzione è prolungabile fino al polo più vicino, ma le PSF fisicamente accettabili non possono presentare poli.

³Questo stesso ragionamento può essere fatto quando si discute la capacità di risoluzione di uno strumento astronomico senza tenere conto dell'atmosfera: il fattore limitante è il SNR dell'immagine rilevata.

dimostra che sotto queste condizioni $Y(f_x, f_y)$ assume la forma esplicita:

$$Y = \frac{\mathcal{T}^* \phi_o}{|\mathcal{T}|^2 \phi_o + \phi_n} \quad (5.3)$$

dove \mathcal{T} è la trasformata di FOURIER della PSF, mentre ϕ_o e ϕ_n sono rispettivamente gli spettri di potenza dell'oggetto osservato e del rumore:

$$\phi_o(f_x, f_y) = \langle |\mathcal{F}[o]|^2 \rangle \quad (5.4)$$

$$\phi_n(f_x, f_y) = \langle |\mathcal{F}[n]|^2 \rangle \quad (5.5)$$

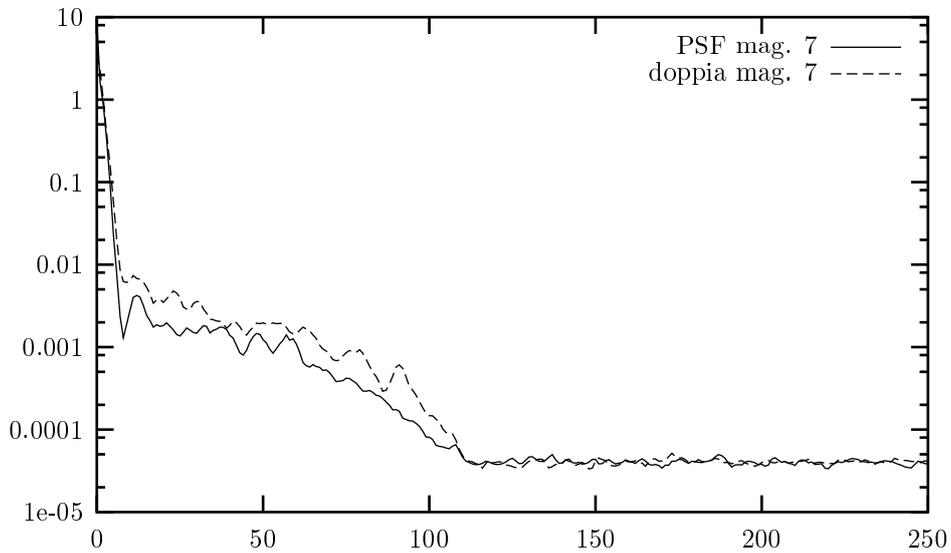


Figura 5.3: Forma caratteristica dello spettro di potenza nel caso di oggetti di magnitudine 7. Il grafico riportato è stato ottenuto applicando una media circolare allo spettro di potenza di un'immagine simulata col modello a strati di GREENWOOD. L'ascissa è in pixel, mentre l'ordinata è in scala arbitraria.

Chiaramente non conosciamo $\phi_o(f_x, f_y)$, dato che stiamo appena cercando di ricostruire $o(x, y)$. Comunque possiamo costruire un modello per $\phi_o(f_x, f_y)$ grazie alla forma caratteristica dello spettro di potenza (vedi figura 5.3). Dopo una certa frequenza spaziale lo spettro è dominato dal rumore ϕ_n , che possiamo stimare mediante un'opportuna media. A questo punto possiamo approssimare lo spettro del segnale come

$$\phi_o(f_x, f_y) \approx \phi_i(f_x, f_y) - \phi_n \quad (5.6)$$

dove $\phi_i(f_x, f_y)$ è lo spettro di potenza dell'immagine rilevata. Per quanto riguarda la stima dello spettro dell'immagine $\phi_i(f_x, f_y)$ possiamo scegliere 2 approcci differenti:

- Mediare un adeguato ensemble di spettri di potenza di immagini rilevate. In questo caso otteniamo una migliore soppressione del rumore.
- Utilizzare lo spettro di potenza dell'immagine analizzata. Allora vengono messi in evidenza più dettagli, ma con una minore attenuazione del rumore (viene eliminata esclusivamente la componente Poissoniana e non quella dovuta alle fluttuazioni atmosferiche). Inoltre c'è il pericolo di false immagini soprattutto nel caso di oggetti puntiformi (stelle doppie).

Risultati

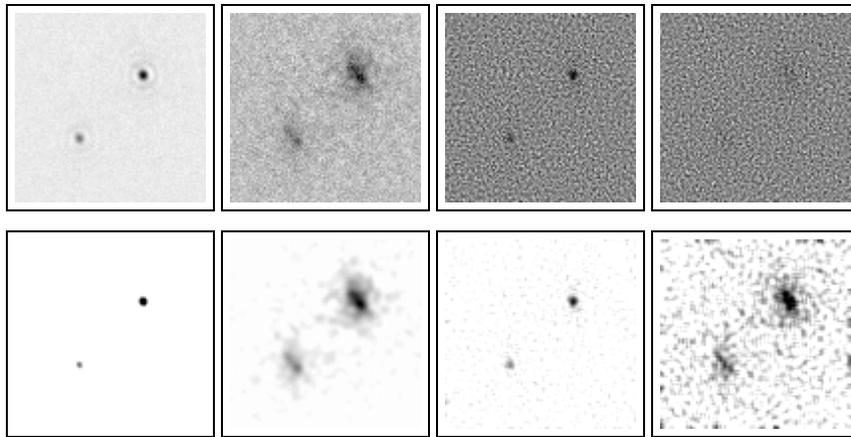


Figura 5.4: Esempi dell'immagine della stella doppia recuperati col metodo di FOURIER-WIENER. La riga superiore illustra le immagini in uscita dal programma di recupero. In quella inferiore le stesse immagini vengono presentate dopo una post-elaborazione mediante opportuni filtri contenuti nei pacchetti standard di elaborazione dell'immagine. Da sinistra a destra abbiamo: separazione tra oggetto e stella di riferimento $6''$, magnitudine guida 7, magnitudine oggetto 7 e a seguire 12-7-7, 6-7-11, 12-7-11. Per ogni immagine sono state mediate 500 realizzazioni. Le separazioni tra le componenti della stella doppia è $0.65''$.

Grazie al numero ridotto di operazioni da effettuare per ogni immagine da recuperare, è stato possibile utilizzare la tecnica di FOURIER-WIENER per simulazioni della durata di 5 secondi (quindi 500 immagini).

Le immagini recuperate soffrono di 2 diverse forme di degrado:

- Il rumore presente nell'immagine. Questo è in maggior parte dovuto alla magnitudine alta degli oggetti osservati.
- I difetti nella riproduzione della morfologia dell'oggetto. Dipendono dall'anisoplanatismo tra PSF di riferimento e oggetto osservato.

Le 2 forme di degrado non sono facilmente distinguibili in pratica. Notiamo comunque che aumentando il tempo di posa possiamo migliorare il rapporto segnale-rumore dell'immagine. La qualità finale è però limitata dalla conoscenza della PSF del sistema e quindi dall'anisoplanatismo.

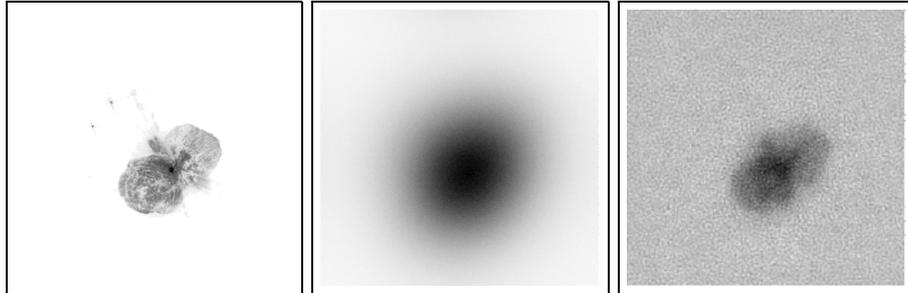


Figura 5.5: Immagine originale (sinistra), risultato di una lunga esposizione (centro) e risultato della deconvoluzione (destra). Il lato dell'immagine è $1.8''$. La durata della simulazione è di 20 secondi, la magnitudine sia dell'oggetto osservato che della stella di guida è 6, la separazione è $6''$. Il filtro inverso è stato modellato utilizzando un unico spettro di potenza. Pupilla da 1.8 m. L'immagine è stata post-elaborata per attenuare il rumore.

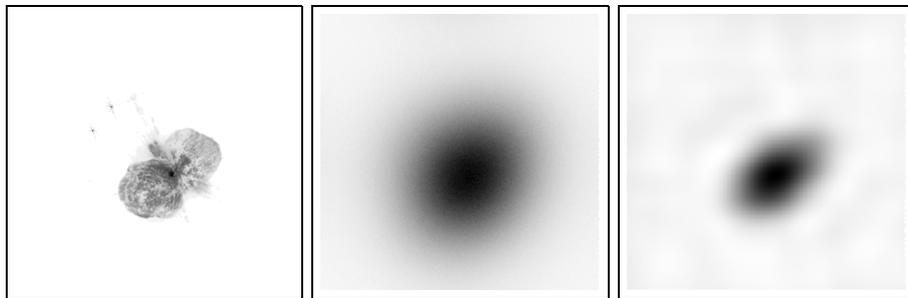


Figura 5.6: Immagine originale (sinistra), risultato di una lunga esposizione (centro) e risultato della deconvoluzione (destra). Il lato dell'immagine è $1.8''$. La durata della simulazione è di 10 secondi, la magnitudine sia dell'oggetto osservato che della stella di guida è 7, la separazione è $4''$. Il filtro inverso è stato modellato utilizzando una media di 50 spettri di potenza. Pupilla da 1.8 m.

Un nota *molto* importante è l'assunzione che nella PSF a nostra disposizione sia codificata anche l'informazione di tip-tilt, o meglio, questa sia affetta dall'anisoplanatismo allo stesso modo delle altre componenti. Purtroppo abbiamo visto che per le stelle artificiali ciò è falso, visto che la variazione del percorso di ascesa del laser fa sì che non possiamo conoscere

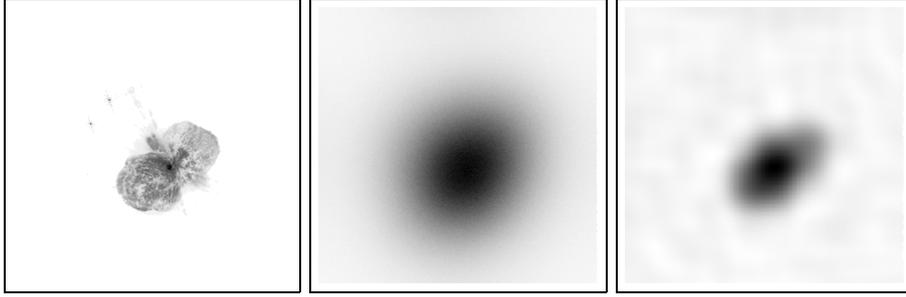


Figura 5.7: Immagine originale (sinistra), risultato di una lunga esposizione (centro) e risultato della deconvoluzione (destra). Il lato dell'immagine è $1.8''$. La durata della simulazione è di 10 secondi, la magnitudine sia dell'oggetto osservato che della stella di guida è 7, la separazione è $4''$. Il filtro inverso è stato modellato utilizzando una media di 50 spettri di potenza. Pupilla da 3.5 m.

precisamente la posizione in cui si “accenderà” la stella artificiale. Questo è il motivo per cui uno dei campi di studio più fiorenti nell'ambito dello studio dei sistemi di correzione sub-atmosfera è proprio il recupero del tip-tilt a partire da effetti secondari indotti dall'atmosfera.

Discussione del SNR

Come metrica per la determinazione della qualità dell' algoritmo di recupero possiamo utilizzare il rapporto SNR dello spettro di potenza del segnale utile presente nell'immagine recuperata. Chiaramente quest'informazione è incompleta per giudicare le prestazioni dell' algoritmo, ma comunque è in grado di fornire un utile quadro della situazione. Vediamo i dettagli della procedura per ottenere l'informazione desiderata (per semplicità trattiamo il caso continuo, il passaggio al caso pratico di immagine discreta è immediato):

1. Data l'immagine $I(x, y)$ ne calcoliamo lo spettro di potenza $\mathcal{P}_I(f_x, f_y)$:

$$\mathcal{P}_I(f_x, f_y) = |\mathcal{F}[I(x, y)]|^2 \quad (5.7)$$

2. Da questo sottraiamo la componente di rumore ad alta frequenza, che può essere stimata dallo spettro stesso oppure calcolata conoscendo la statistica del rumore.
3. Accumuliamo per un adeguato numero N di realizzazioni del seeing i momenti primo e secondo dello spettro di potenza dell'immagine così ottenuto:

$$\mu(f_x, f_y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{P}_I(f_x, f_y) \quad (5.8)$$

$$\mu_2(f_x, f_y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{P}_I^2(f_x, f_y) \quad (5.9)$$

$$(5.10)$$

4. Possiamo ora calcolare la varianza in funzione della frequenza spaziale:

$$\sigma^2(f_x, f_y) = \mu_2(f_x, f_y) - \mu^2(f_x, f_y) \quad (5.11)$$

5. Da questa possiamo passare banalmente al rapporto segnale su rumore:

$$\text{SNR}(f_x, f_y) = \frac{\mu(f_x, f_y)}{\sigma(f_x, f_y)} \quad (5.12)$$

6. Infine per migliorare la stabilità statistica effettuiamo la media circolare del rapporto segnale su rumore così ottenuto e quindi otteniamo l'espressione desiderata $\text{SNR}(f)$.

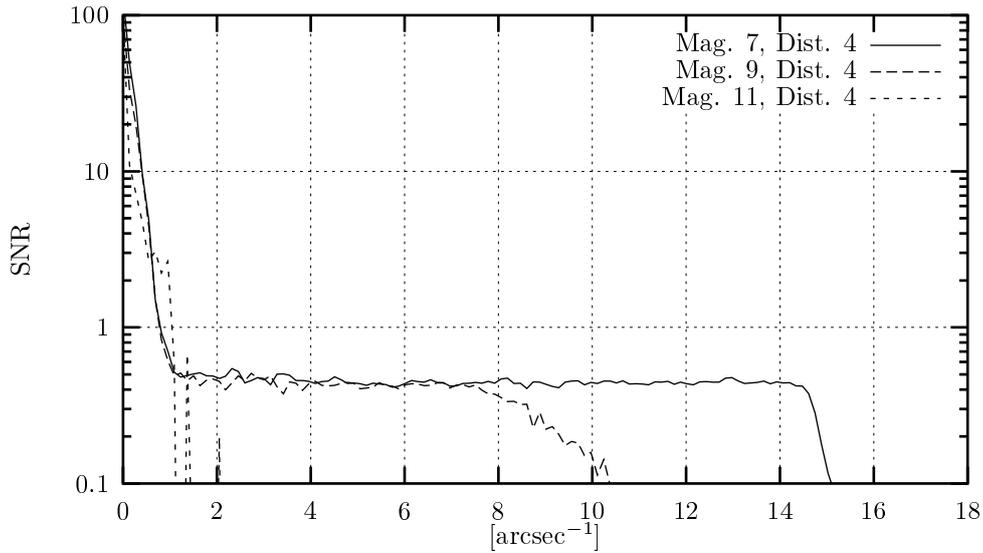


Figura 5.8: Rapporto SNR nel caso di pupilla da 1.8 m, singolo frame in funzione della magnitudine dell'oggetto osservato. Separazione 4'' e magnitudine stella di riferimento 7.

L'oggetto osservato utilizzato è stato un pixel illuminato, che è l'approssimazione discreta della δ di DIRAC. In questo caso lo spettro di potenza è una funzione costante: ciò ci permette di vedere chiaramente la risposta spettrale del seeing a prescindere dalla forma dell'oggetto. Notiamo inoltre, che questo è il caso migliore per quanto riguarda la possibilità di rilevamento

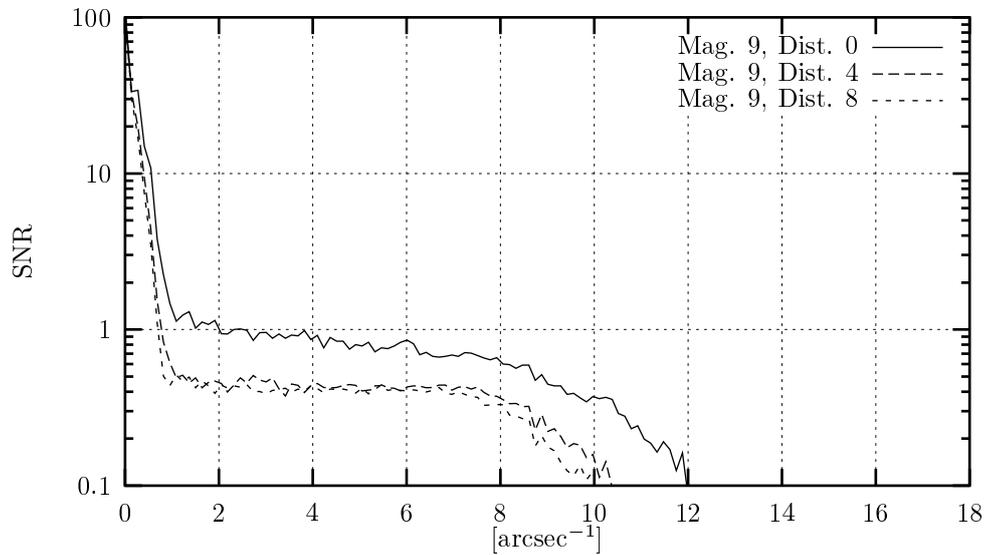


Figura 5.9: Rapporto SNR nel caso di pupilla da 1.8 m, singolo frame in funzione della separazione tra oggetto osservato e stella di riferimento. La magnitudine dell'oggetto è 9 mentre della stella di riferimento è 7.

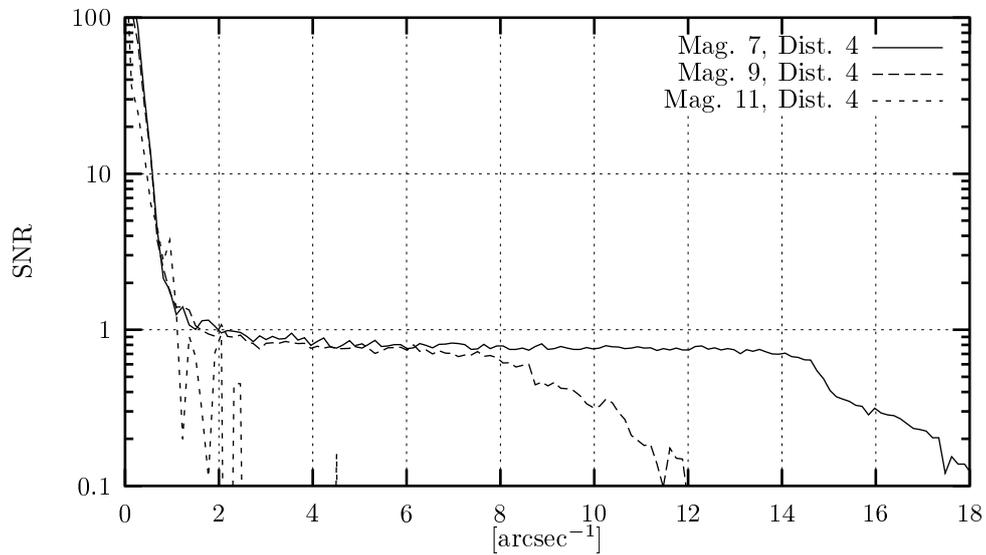


Figura 5.10: Rapporto SNR nel caso di pupilla da 1.8 m, con media di 10 frame in funzione della magnitudine dell'oggetto osservato. Separazione 4'' e magnitudine stella di riferimento 7.

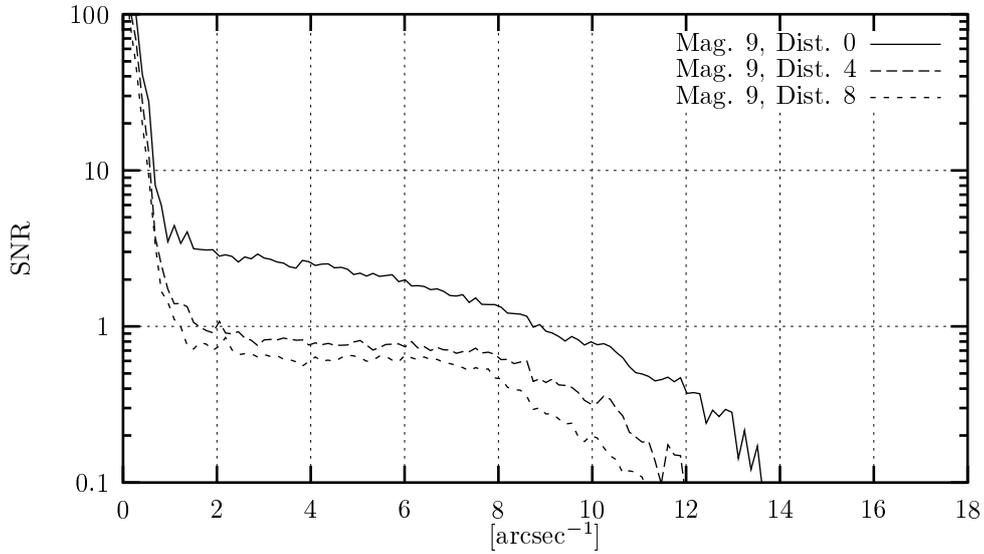


Figura 5.11: Rapporto SNR nel caso di pupilla da 1.8 m, con media di 10 frame in funzione della separazione tra oggetto osservato e stella di riferimento. La magnitudine dell'oggetto è 9 mentre della stella di riferimento è 7.

dell'oggetto, visto che in generale per oggetti complessi lo spettro di potenza è decrescente.

In linea di massima la rilevazione del segnale per una data frequenza spaziale si ottiene con un rapporto SNR pari a 1. Per migliorare questo rapporto possiamo mediare più immagini. Nel caso che queste siano indipendenti, otteniamo un SNR risultante:

$$\text{SNR}^M(f) = \sqrt{M} \text{SNR}(f) \quad (5.13)$$

dove M è il numero di immagini mediate. Questa espressione vale rigorosamente nel caso della componente Poissoniana (quindi legata alla statistica del tempo di arrivo dei fotoni), ma non per le fluttuazioni dovute al seeing. L'ipotesi di Taylor si traduce in una correlazione spazio-temporale che rende non rigorosa l'espressione 5.13.

Nei grafici presenti nelle pagine dalla 79 alla 83 è studiato il rapporto SNR in funzione della magnitudine dell'oggetto osservato (la magnitudine della stella di riferimento è sempre posta uguale alla 7), della separazione tra oggetto e stella di riferimento, del diametro del telescopio (abbiamo simulato una pupilla da 1.8 m e 3.5 m) e il numero di immagini mediate per ottenere il risultato finale. L'ensemble utilizzato è di 50 simulazioni indipendenti, mentre nel caso di media su più immagini queste sono sequenziali e spaziate di 1 centesimo di secondo.

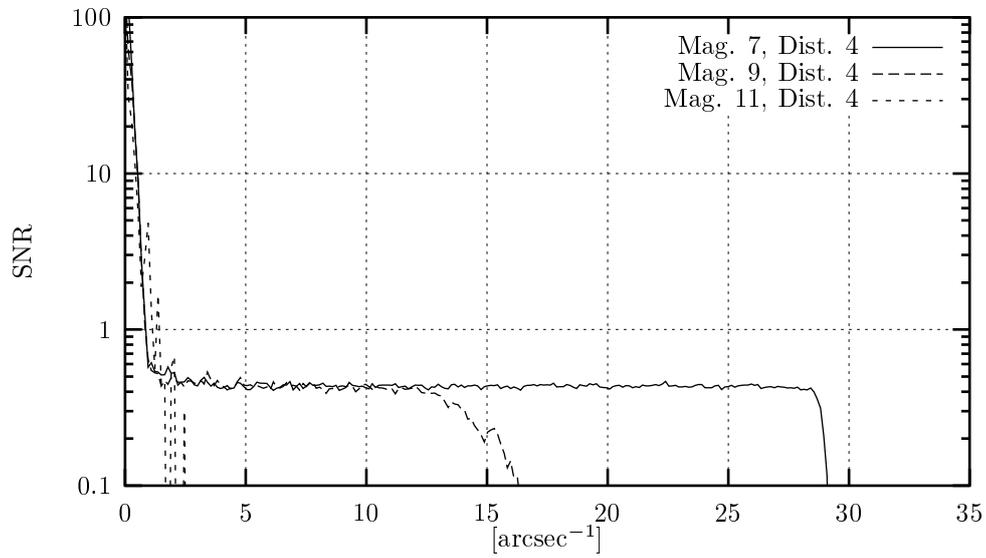


Figura 5.12: Rapporto SNR nel caso di pupilla da 3.5 m, singola immagine in funzione della magnitudine dell'oggetto osservato. Separazione 4'' e magnitudine stella di riferimento 7.

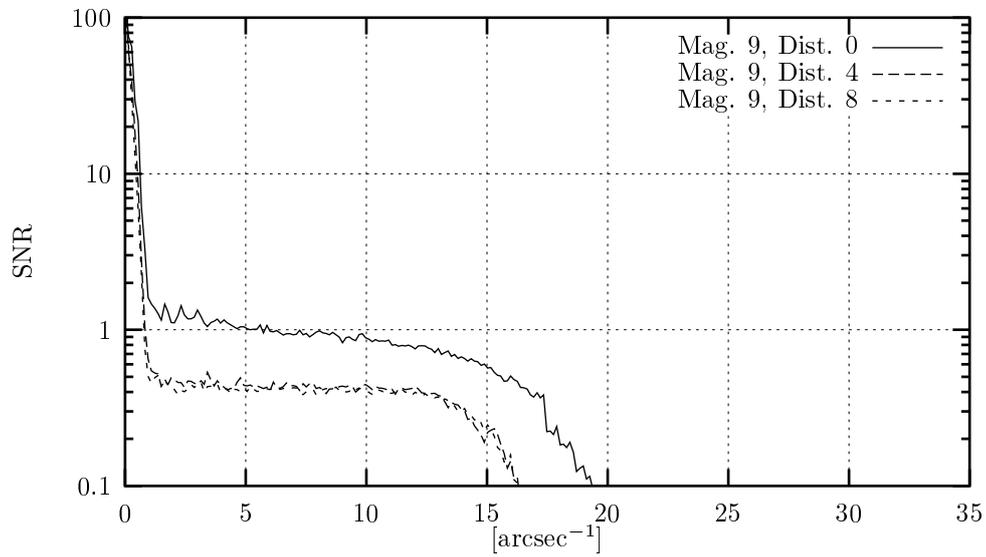


Figura 5.13: Rapporto SNR nel caso di pupilla da 3.5 m, singola immagine in funzione della separazione tra oggetto osservato e stella di riferimento. La magnitudine dell'oggetto è 9 mentre della stella di riferimento è 7.

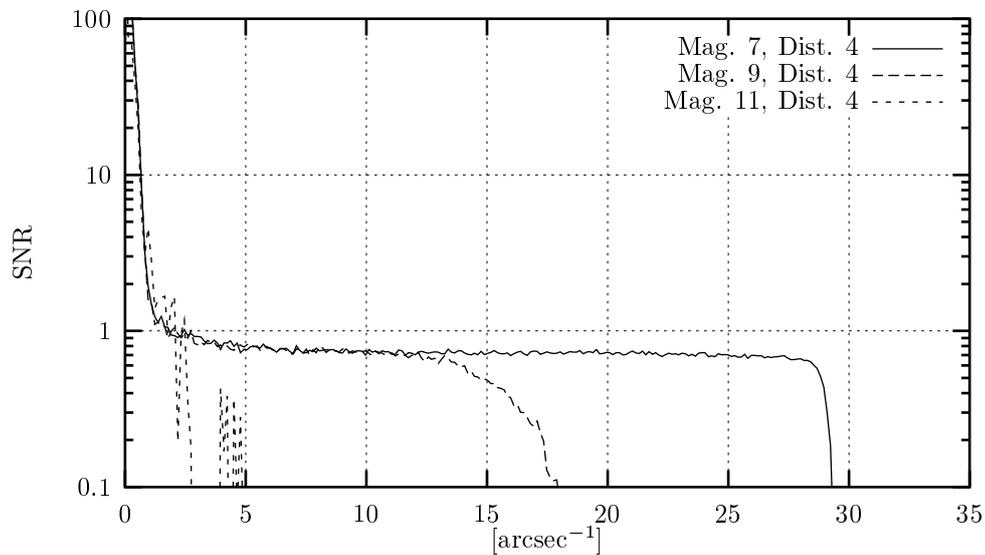


Figura 5.14: Rapporto SNR nel caso di pupilla da 3.5 m, con media di 10 immagini in funzione della magnitudine dell'oggetto osservato. Separazione 4'' e magnitudine stella di riferimento 7.

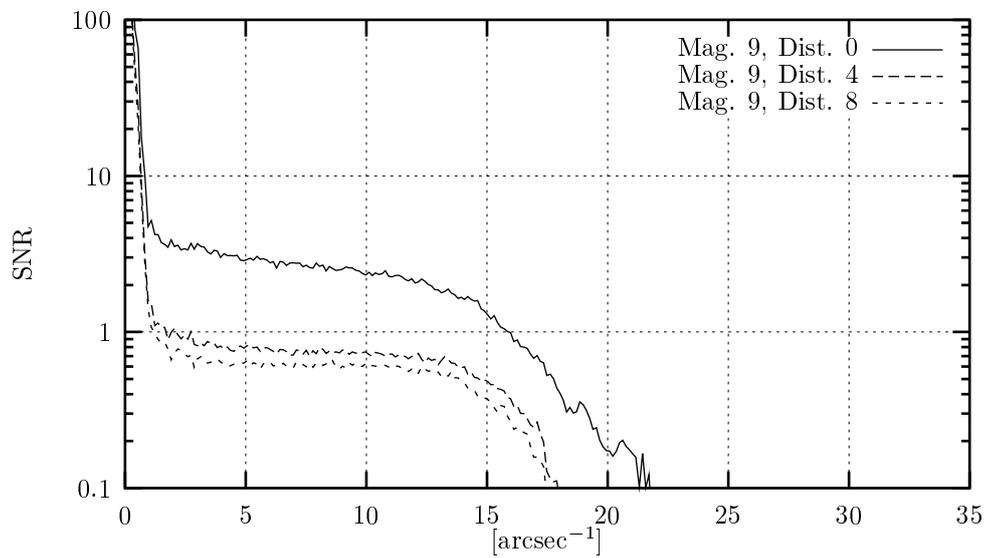


Figura 5.15: Rapporto SNR nel caso di pupilla da 1.8 m, con media di 10 immagini in funzione della separazione tra oggetto osservato e stella di riferimento. La magnitudine dell'oggetto è 9 mentre della stella di riferimento è 7.

Vediamo ora di discutere i risultati effettivamente ottenuti:

- La magnitudine dell'oggetto osservato determina in maniera molto evidente la frequenza massima recuperata. Ciò è facilmente intuibile se pensiamo alla costruzione del filtro inverso di FOURIER-WIENER. In queste simulazioni si è utilizzato per ottenerlo la media di 50 spettri di potenza di immagini indipendenti. Una magnitudine alta dell'oggetto determina quindi una frequenza di taglio più bassa. In alternativa si può usare lo spettro di potenza della singola immagine, come si è fatto nella figura 5.4. Il risultato in questo caso è più rumoroso e le immagini stellari sono deformate, ma le componenti dell'immagine appaiono più contrastate se opportunamente elaborate.
- Se osserviamo la variazione del SNR in funzione della distanza vediamo che la qualità del recupero viene notevolmente compromessa al di fuori del campo di isoplanatismo. In compenso la differenza tra il SNR per una separazione di $4''$ e $8''$ non è molto grande.
- Il miglioramento della qualità dell'immagine nel passaggio del diametro della pupilla da 1.8 m a 3.5 m è come previsto: nel caso migliore la frequenza spaziale massima è quasi doppia con un rapporto SNR alle medie frequenze leggermente minore. Questo deriva dal fatto che l'effetto del seeing è tanto più nefasto, quanto maggiore è il rapporto D/r_0 .
- Passando dalla singola immagine alla media di 10, il guadagno è un po' inferiore al fattore 3.2 previsto dalla 5.13. Come già detto ciò è facilmente spiegabile dalla non perfetta indipendenza delle singole immagini.

Discussione delle funzioni di sharpness

In questa sezione vediamo se è possibile caratterizzare la qualità del recupero mediante le funzioni di sharpness introdotte a pagina 14. In particolare analizzeremo il comportamento delle funzioni di sharpness S_3 e S_4 calcolate per il recupero ottenuto con un dato numero N di immagini a breve tempo di esposizione.

I casi analizzati comprendono le pupille da 1.8 m e da 3.5 m e una separazione tra oggetto studiato e stella di riferimento di $4''$ e $8''$. In tutti i casi l'oggetto recuperato è una stella puntiforme di magnitudine 9, mentre la stella di riferimento ha magnitudine 7.

Si vede abbastanza agevolmente che la funzione S_4 è più adatta alla caratterizzazione della qualità dell'immagine recuperata. La S_4 è quasi sempre crescente, con l'esclusione di un tratto di circa 1 secondo visibile nella 5.19. Probabilmente questo è dovuto ad un momento di seeing particolarmente sfavorevole in rapporto a quello presente negli istanti precedenti.

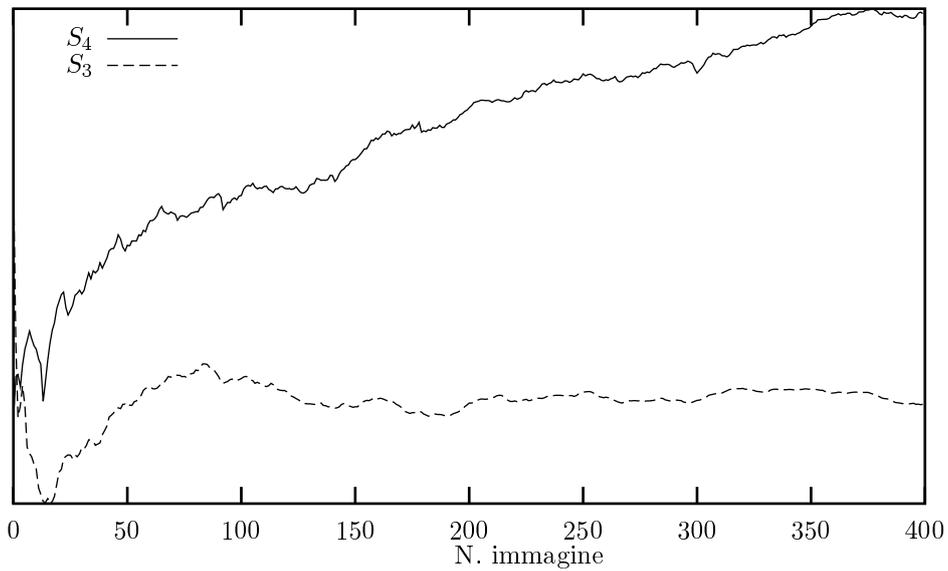


Figura 5.16: Funzioni di *sharpness* per una pupilla da 1.8 m, angolo di anisoplanatismo 4". L'oggetto è una stella di magnitudine 9, mentre la stella di riferimento ha magnitudine 7.

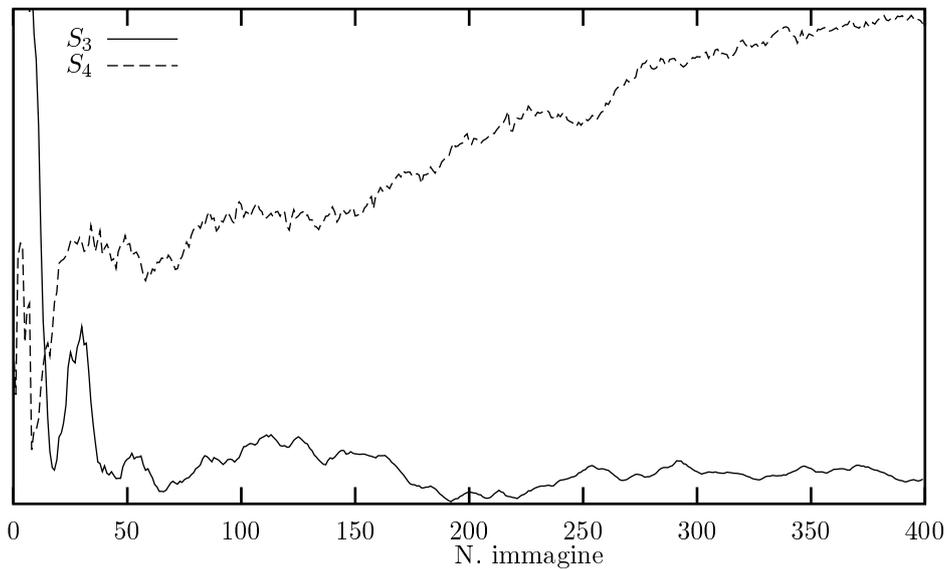


Figura 5.17: Funzioni di *sharpness* per una pupilla da 1.8 m, angolo di anisoplanatismo 8". L'oggetto è una stella di magnitudine 9, mentre la stella di riferimento ha magnitudine 7.

Entrambe le funzioni soffrono per il problema del rumore presente nell'immagine iniziale, che fa loro assumere un valore irregolarmente alto.

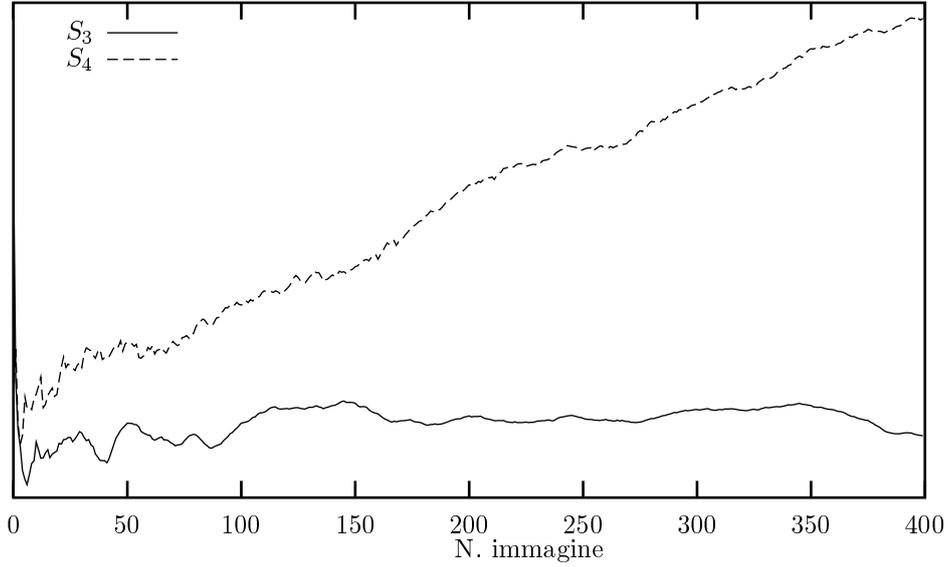


Figura 5.18: Funzioni di *sharpness* per una pupilla da 3.5 m, angolo di anisoplanatismo 4". L'oggetto è una stella di magnitudine 9, mentre la stella di riferimento ha magnitudine 7.

5.2.2 Deconvoluzione non lineare: metodo di Richardson-Lucy

Il metodo di RICHARDSON-LUCY è un metodo iterativo basato sulla massimizzazione della probabilità che l'immagine rilevata sia effettivamente una realizzazione di quella vera nelle condizioni di statistica Poissoniana.

Notiamo innanzi tutto che possiamo indicizzare i pixel dell'immagine utilizzando un solo indice n . In questo caso l'equazione di convoluzione per il caso discreto diventa

$$I_m = \sum_n h_{n,m} O_n \quad (5.14)$$

dove $h_{n,m}$ è la versione discreta della PSF con condizione di normalizzazione

$$\sum_{n,m} h_{n,m} = 1 \quad (5.15)$$

Questa espressione è per il caso generico, mentre nel caso spazio-invariante la 5.14 può essere riscritta come:

$$\mathbf{I} = \mathbf{h} * \mathbf{O} \quad (5.16)$$

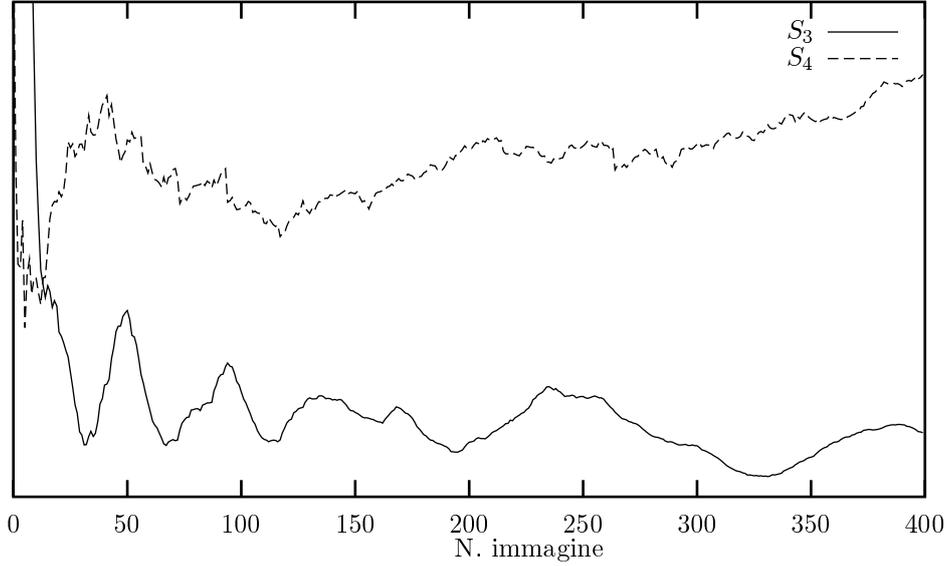


Figura 5.19: Funzioni di *sharpness* per una pupilla da 3.5 m, angolo di anisoplanatismo $8''$. L'oggetto è una stella di magnitudine 9, mentre la stella di riferimento ha magnitudine 7.

In questo secondo caso col simbolo $*$ si intende la convoluzione ciclica.

La probabilità di leggere per il pixel generico O_n un valore I_n nel caso di processo Poissoniano è

$$\mathcal{P}(I_n|O_n) = \frac{e^{-O_n} O_n^{I_n}}{I_n!} \quad (5.17)$$

Definiamo il logaritmo della funzione di *likelihood* come:

$$\ln \mathcal{L} = \sum_n (I_n \ln O_n - O_n - \ln(I_n!)) \quad (5.18)$$

Nel nostro caso abbiamo misurato I_n e quindi $\ln \mathcal{L}$ va pensata in funzione di O_n . La 5.18 è massima se O_n è l'immagine vera più probabile. Deriviamo la 5.18 per trovare il valore di O_n che massimizza $\ln \mathcal{L}$

$$\frac{d \ln \mathcal{L}}{d O_n} = \sum_n \left(\frac{I_n}{O_n} - 1 \right) = 0 \quad (5.19)$$

Tenendo conto della 5.14 possiamo infine scrivere l'iteratore di RICHARDSON-LUCY:

$$\begin{aligned} I_m^k &= \sum_n O_n^k h_{n,m} \\ O_n^{k+1} &= O_n^k \frac{\sum_n (I_n / I_n^k) h_{n,m}}{\sum_n h_{n,m}} \end{aligned} \quad (5.20)$$

L'iteratore può essere espresso in maniera vettoriale tenendo conto della condizione di normalizzazione della PSF e dell'invarianza di questa come:

$$\mathbf{O}^{k+1} = \mathbf{O}^k \left(\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{h} * \mathbf{O}^k} \star \mathbf{h} \right) \quad (5.21)$$

Questa formulazione ha un netto vantaggio in termini di risorse di calcolo (complessità $\mathcal{O}(n^2 \ln^2 n)$ dovuta alla FFT) rispetto a quella con le somme sui singoli elementi (complessità $\mathcal{O}(n^4)$).

Come si può vedere dall'espressione 5.20 se l'immagine ricostruita iniziale \mathbf{O}^0 , quella misurata \mathbf{I} e la PSF \mathbf{h} sono positive, il risultato dell'iterazione è sicuramente una matrice definita positiva, quindi il metodo di RICHARDSON-LUCY impone il vincolo di non-negatività della soluzione.

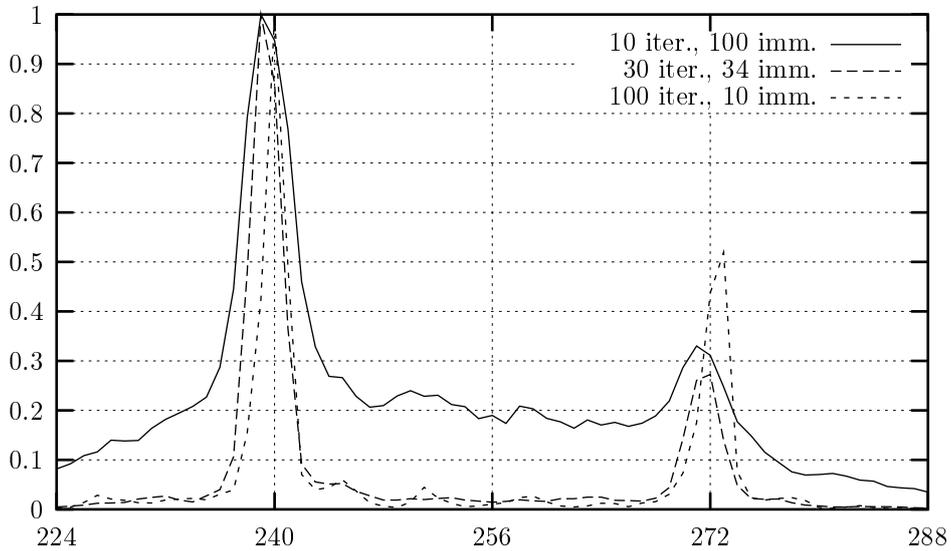


Figura 5.20: Risultati della deconvoluzione di RICHARDSON-LUCY a parità di risorse di elaborazione.

Numero di iterazioni ottimale

Un problema nell'applicazione del ciclo di iterazione di RICHARDSON-LUCY è trovare un criterio per dire quando è stato raggiunto il miglior risultato possibile e quindi fermare il ciclo. Il metodo standard è fermare il ciclo quando la correzione effettuata durante l'ultima iterazione comincia a crescere. Se chiamiamo \mathbf{I}^k l'immagine al passo k e \mathbf{I}^{k-1} quella al passo prima, possiamo definire la correzione come:

$$c^k = \sum_i \sum_j \left(I_{i,j}^k - I_{i,j}^{k-1} \right)^2 \quad (5.22)$$

dove la sommatoria va intesa su tutti i pixel dell'immagine. Se $c^{k+1} > c^k$ concludiamo il ciclo e prendiamo I^k come uscita dell'algoritmo di deconvoluzione.

Il numero di iterazioni necessario è in pratica assai alto e cresce con la complessità dell'oggetto e con la magnitudine dell'oggetto e della stella di riferimento. In pratica si va da un minimo di 100 iterazioni sino ad alcune migliaia. Questo rende il metodo di RICHARDSON-LUCY inadatto alla deconvoluzione del seeing astronomico. Si potrebbe pensare di fermare il ciclo di iterazione in anticipo e ovviare a ciò mediando diverse immagini in uscita. Purtroppo questa idea non funziona, come è mostrato in figura 5.20. Ciò probabilmente deriva dalla non linearità del metodo: se non viene effettuato un numero adeguato di iterazioni, la risposta fotometrica è errata.

5.3 Riepilogo del lavoro svolto

In questo capitolo sono state adattate 2 tecniche di deconvoluzione ormai classiche, il filtro inverso di FOURIER-WIENER e il metodo interattivo di RICHARDSON-LUCY, al caso del recupero dell'immagine degradata dal seeing atmosferico. Per questa particolare applicazione è risultato più efficiente, in termini di carico computazionale, il primo metodo.

L'analisi dei risultati ottenuti mediante simulazioni ha dimostrato quanto è importante la metodologia di costruzione del filtro inverso per il raggiungimento di buoni risultati. Se il filtro è costruito utilizzando più immagini, la magnitudine limite raggiungibile è la 9. La separazione massima tra stella di riferimento e oggetto osservato utilizzabile è $8''$. Se vogliamo andare a magnitudini più alte dobbiamo utilizzare filtri inversi basati su una sola immagine, che però danno risultati più rumorosi.

In questo capitolo è inoltre stato presentato uno dei problemi ancora aperti sia dal punto di vista teorico che pratico nell'utilizzo delle stelle di riferimento artificiali: il recupero dell'informazione sul *tip-tilt*.

Capitolo 6

Tecniche di compensazione del seeing mediante SAA

Nel caso in cui non conosciamo la PSF il recupero dell'immagine è notevolmente più complicato, dato che nell'equazione di convoluzione sia la PSF che l'immagine originale sono sconosciute. In questo capitolo vediamo una tecnica semplice adatta a essere utilizzata per l'analisi *on-line*.

6.1 Descrizione

La tecnica SAA, ovvero *Shift and Add Analysis*, consiste nel centrare l'immagine a breve periodo di esposizione alle coordinate del massimo di intensità prima di sommarla all'immagine finale. L'algoritmo è molto semplice e, sotto certe condizioni, da risultati soddisfacenti.

Per capire perché la SAA funzioni dobbiamo tenere presente l'approccio interferometrico alla formazione dell'immagine, esposto nella sezione 2.3.3. Possiamo pensare che ogni sottopupilla di diametro uguale alla lunghezza di coerenza generi un'immagine dell'oggetto osservato e che il risultato finale sia dato dall'interferenza di queste. Tralasciamo, in prima approssimazione, gli effetti dell'interferenza; pensiamo quindi all'intensità finale come alla somma delle intensità dei contributi delle singole sottopupille. L'immagine finale è quindi la sovrapposizione di più *sub-immagini*, ognuna delle quali è il risultato della convoluzione dell'immagine dell'oggetto osservato con una speckle della PSF. Ipotizziamo ora di ricentrare l'immagine totale a breve esposizione su una sub-immagine prima di integrare tutta la serie. Visto il carattere stocastico della posizione delle sub-immagini solo quella centrata contribuirà all'intensità nella stessa zona dell'immagine in ogni fotogramma. Ovviamente possiamo agganciarci solo al punto più intenso della sub-immagine più luminosa, dato che questo è l'unico punto univocamente definito in tutte le immagini a breve esposizione.

Capito il meccanismo di formazione possiamo facilmente vedere le difficoltà intrinseche alla SAA:

1. Le sub-immagini differenti da quella selezionata mediante aggancio del massimo contribuiscono ad un fondo che deteriora la qualità dell'immagine.
2. L'effetto di interferenza tra sottopupille introduce un ulteriore peggioramento della qualità del risultato finale. Ovviamente più l'oggetto osservato è complesso, più questo effetto è considerevole.
3. Se consideriamo lo shot-noise, particolarmente evidente nel caso di oggetti di bassa magnitudine, ci rendiamo conto che il massimo dell'immagine rilevata non corrisponde a quello della sub-immagine più luminosa. Nel caso di oggetto osservato con luminosità omogenea questo effetto è ancora più accentuato.

Possiamo prevedere l'influenza dei punti 2 e 3 sul risultato finale osservando l'immagine a breve esposizione. Come mostrato nella sezione 4.6, nel caso di oggetti troppo complessi e/o magnitudini troppo alte viene a mancare la forma a speckles dell'immagine. Questo significa una perdita della struttura dell'immagine che ci impedisce l'uso della SAA. In caso contrario, quando c'è formazione di speckles diciamo che l'oggetto osservato è *point-source dominated*.

Considerando il punto 1 possiamo renderci conto della diminuzione di efficienza del metodo SAA al crescere del diametro della pupilla del telescopio, dato che la lunghezza di coerenza rimane comunque costante.

6.2 Risultati

Di seguito riportiamo un'analisi dei risultati ottenibili con la SAA per varie morfologie dell'oggetto, di magnitudini integrate di questo e modelli di turbolenza atmosferica. Le condizioni di simulazione dell'immagine sono quelle descritte nel capitolo 4. La pupilla simulata è di 1.8 m, mentre la simulazione è composta da 500 fotogrammi per una durata totale di 5 s. In ogni figura è riportata la sezione dell'intensità sulla diagonale dell'immagine normalizzata al massimo. Utilizziamo la magnitudine *integrata* dell'oggetto osservato dato che in pratica è l'unica direttamente misurabile, visto che non possiamo risolvere con tecniche di imaging classiche i singoli componenti di questo.

6.2.1 Greenwood, SNR Infinito

In questa sezione vediamo i risultati dell'applicazione della SAA nel caso di immagini senza shot noise né rumore additivo, quindi in condizioni di

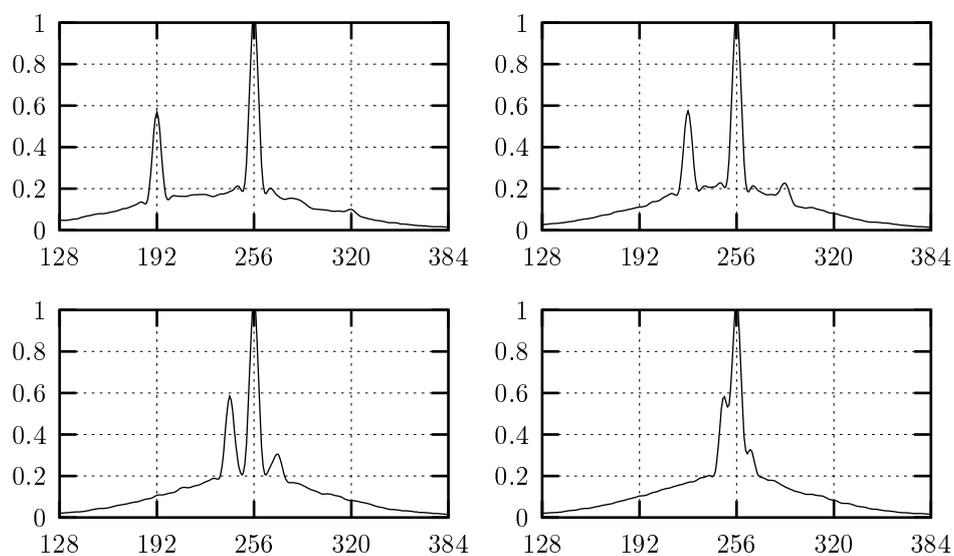


Figura 6.1: Stella doppia con separazione angolare di 0.65, 0.32, 0.16 e 0.08 secondi d'arco (da sinistra a destra e dall'alto in basso). Luminosità della secondaria metà della primaria. SNR infinito.

rapporto segnale-rumore infinito. Questo è il limite superiore ai risultati che possiamo ottenere.

Dalla figura 6.1 notiamo una buona capacità di risoluzione spaziale. È visibile il fondo tipico della SAA di cui si è già parlato. La resa fotometrica non è perfetta, come si può vedere confrontando la luminosità dei picchi, ma è tutto sommato accettabile. Inoltre è visibile uno dei peggiori limiti di questa tecnica: le immagini spurie. L'errore nell'aggancio del massimo provoca la presenza di un picco opposto a quello dovuto alla secondaria. Il problema si aggrava man mano che la distanza angolare cala.

In figura 6.2 è studiata la dipendenza della qualità del recupero in funzione del rapporto di luminosità delle 2 componenti. Vediamo subito un caso dove la SAA fallisce irrimediabilmente: nel caso di sistema doppio con componenti di uguale luminosità. In questo caso ogni sub-immagine ha 2 massimi, così che l'algoritmo di aggancio fallisce. In generale la SAA da buoni risultati e riesce a identificare la stella secondaria anche nelle condizioni più sfavorevoli.

In figura 6.3 è illustrato l'effetto della presenza di un halo intorno alla primaria. È subito evidente come questo sia notevolmente enfatizzato dall'uso della SAA. Nel caso di halo con intensità un decimo della primaria la struttura dell'immagine viene completamente cancellata, mentre si riesce a distinguere la binarietà del sistema nel caso di intensità un centesimo della primaria. Nelle restanti figure l'effetto del halo è appena visibile come un

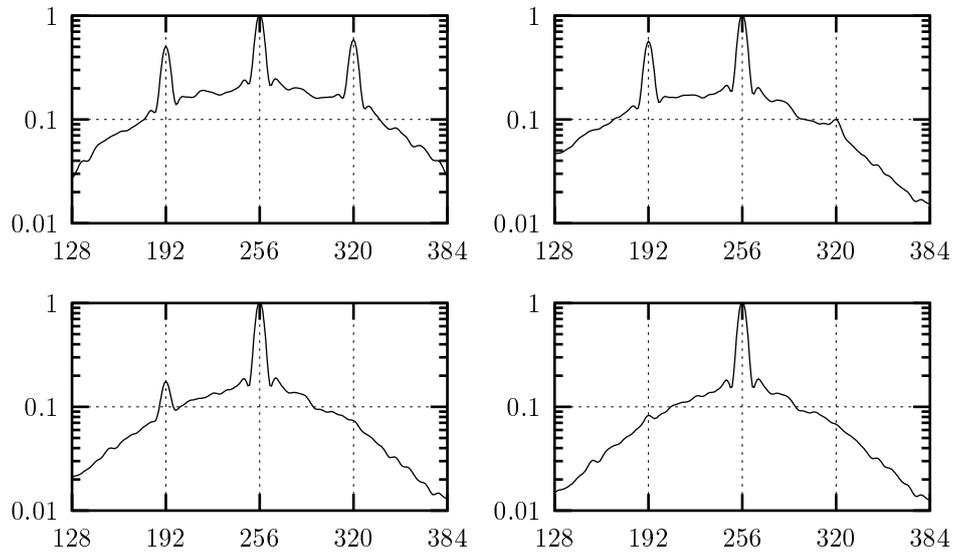


Figura 6.2: Stella doppia con separazione angolare di 0.65 secondi d'arco. Luminosità della secondaria 1.0, 0.5, 0.1 e 0.01 volte la primaria (da sinistra a destra e dall'alto in basso). SNR infinito. Scala logaritmica.

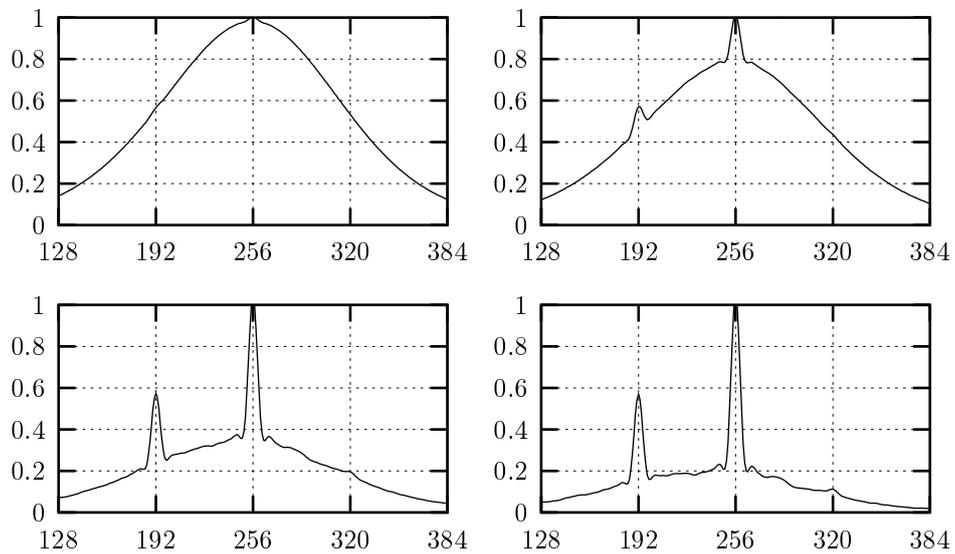


Figura 6.3: Stella doppia con separazione angolare di 0.65 secondi d'arco con primaria immersa in un halo con luminosità di picco 10, 100, 1000, 10000 minore della primaria (da sinistra a destra e dall'alto in basso). SNR infinito.

aumento del fondo.

6.2.2 Greenwood, Magnitudine 7

Per prevedere le caratteristiche della SAA in casi reali dobbiamo aggiungere il rumore intrinseco alla rilevazione delle immagini. La prima conseguenza di ciò è che lo stesso effetto di “somma in fase” che sta alla base del funzionamento della SAA viene a prodursi sulla scala di singolo pixel, dando un punto centrale con una luminosità notevolmente sovrastimata. Per questo in tutte le immagini che verranno presentate in seguito il pixel centrale è sostituito con la media di quelli adiacenti.

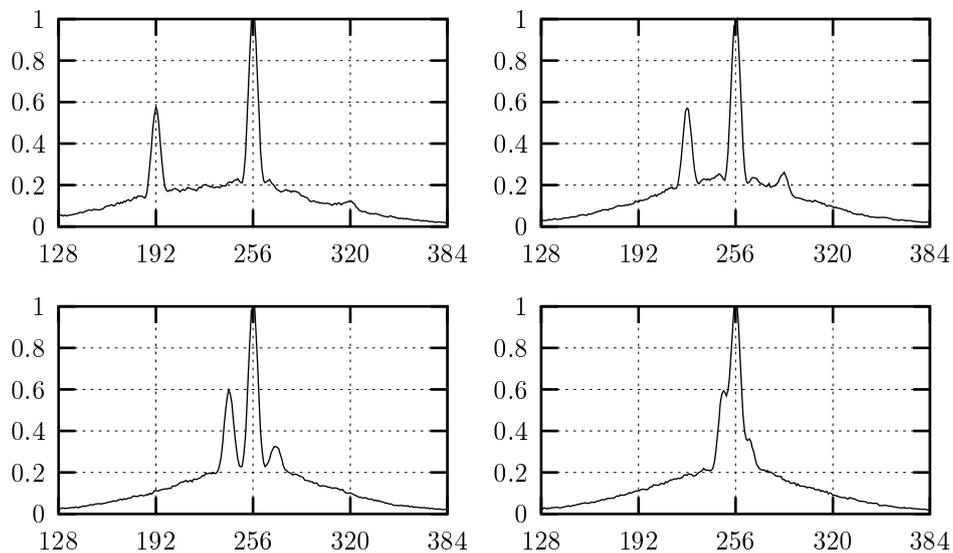


Figura 6.4: Stella doppia con separazione angolare di 0.65, 0.32, 0.16 e 0.08 secondi d’arco (da sinistra a destra e dall’alto in basso). Luminosità della secondaria metà della primaria. Magnitudine integrata 7.

Dalla figura 6.4 vediamo che per una magnitudine 7 l’effetto sulla capacità di risoluzione spaziale è modesto. Più notevole è il peggioramento di qualità nelle altre 2 serie di grafici (figura 6.5 e 6.6):

- Nella prima sparisce del tutto la componente secondaria nel caso della luminosità 100 volte minore della primaria.
- Nella seconda un halo di luminosità 100 volte la primaria fa sparire ogni traccia di struttura all’immagine finale, mentre uno di luminosità 1000 volte minore produce un fondo non trascurabile.

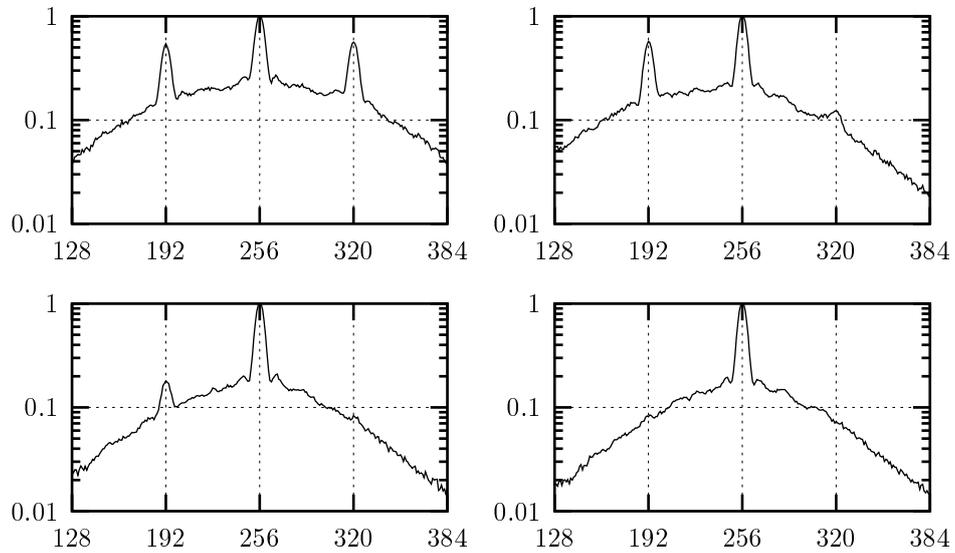


Figura 6.5: Stella doppia con separazione angolare di 0.65 secondi d'arco. Luminosità della secondaria 1.0, 0.5, 0.1 e 0.01 volte la primaria (da sinistra a destra e dall'alto in basso). Magnitudine integrata 7. Scala logaritmica.

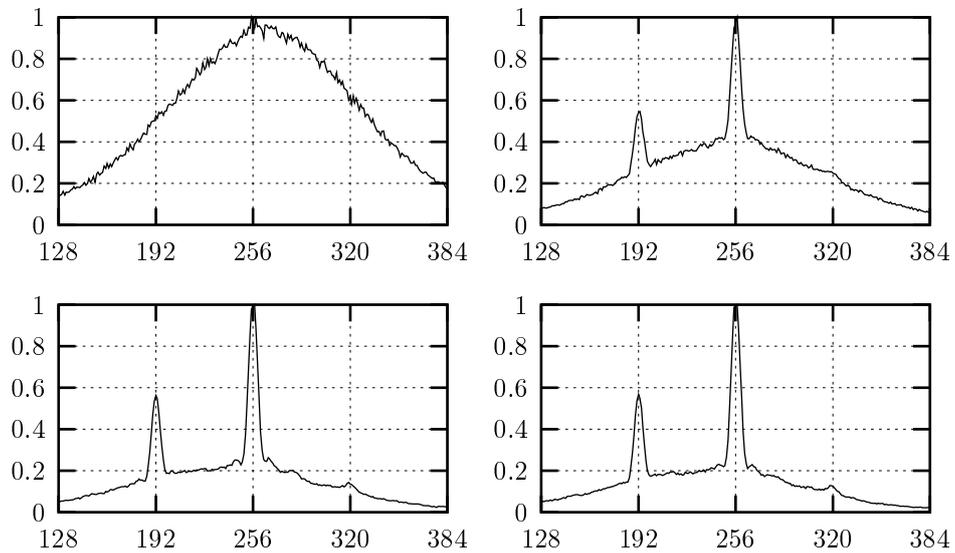


Figura 6.6: Stella doppia con separazione angolare di 0.65 secondi d'arco con primaria immersa in un halo con luminosità di picco 100, 1000, 10000, 100000 minore della primaria (da sinistra a destra e dall'alto in basso). Magnitudine integrata 7.

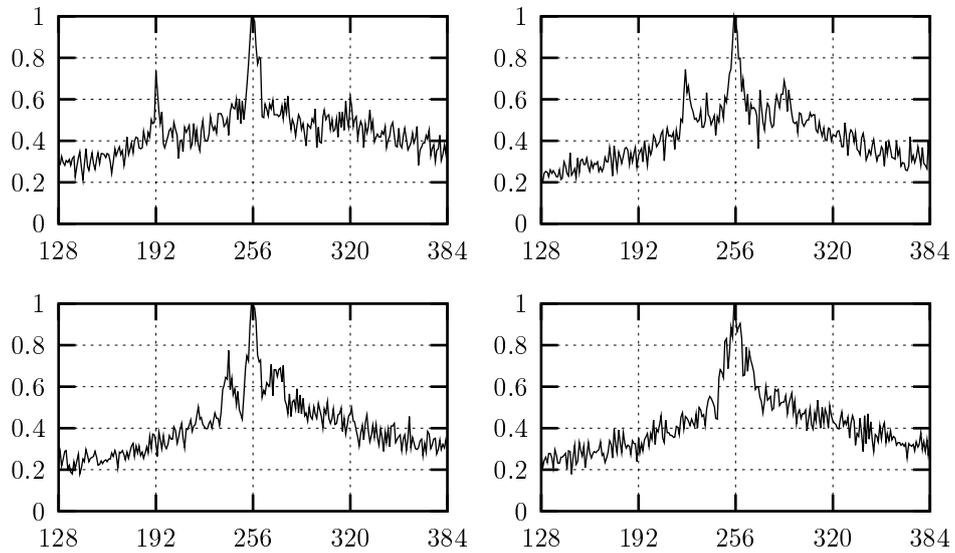


Figura 6.7: Stella doppia con separazione angolare di 0.65, 0.32, 0.16 e 0.08 secondi d'arco (da sinistra a destra e dall'alto in basso). Luminosità della secondaria metà della primaria. Magnitudine integrata 11.

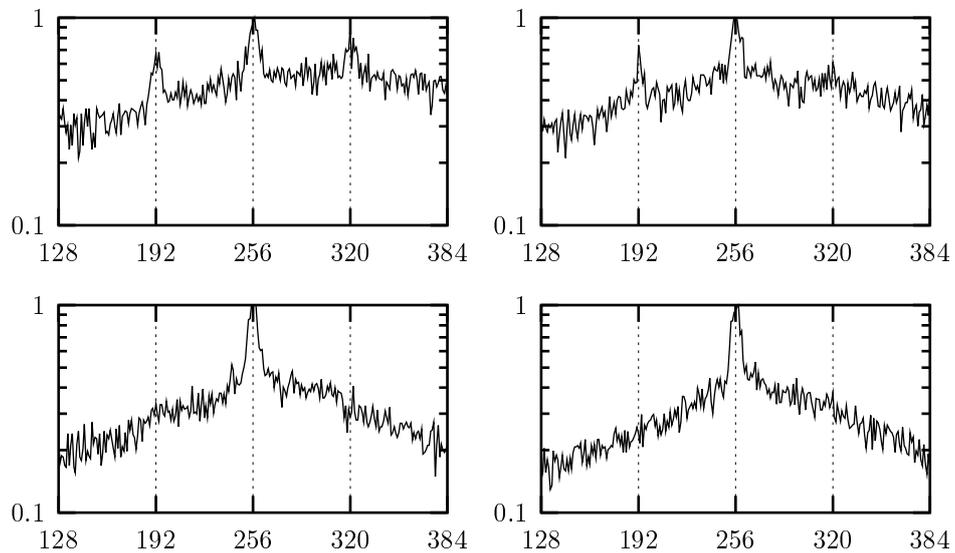


Figura 6.8: Stella doppia con separazione angolare di 0.65 secondi d'arco. Luminosità della secondaria 1.0, 0.5, 0.1 e 0.01 volte la primaria (da sinistra a destra e dall'alto in basso). Magnitudine integrata 11. Scala logaritmica.

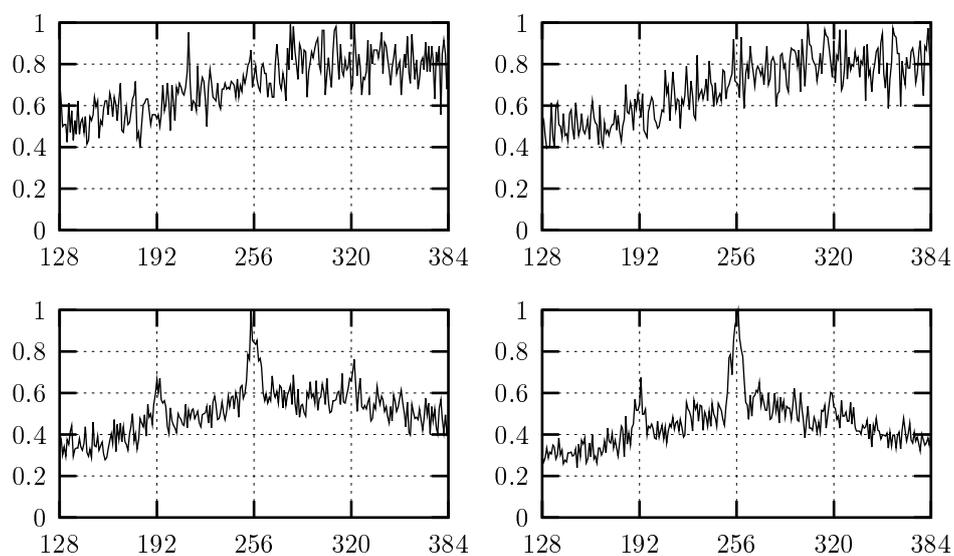


Figura 6.9: Stella doppia con separazione angolare di 0.65 secondi d'arco con primaria immersa in un halo con luminosità di picco 100, 1000, 10000, 100000 minore della primaria (da sinistra a destra e dall'alto in basso). Magnitudine integrata 11.

6.2.3 Greenwood, Magnitudine 11

Questo è, in pratica, il limite raggiungibile con la tecnica SAA. Il problema principale non è tanto il basso rapporto segnale-rumore (che potrebbe essere curato aumentando il tempo di integrazione ovvero il numero immagini elaborate in una serie), quanto la presenza di false immagini e, effetto nuovo rispetto alle immagini già analizzate, la formazione di gradienti nel fondo stesso che perde l'aspetto simmetrico.

Basta la presenza di un seppure debole halo (figura 6.9) per mettere in evidenza questi effetti. Dalle rimanenti figure possiamo vedere che è possibile identificare chiaramente la secondaria solo per separazioni maggiori a 0.3 secondi d'arco e nel caso di luminosità di questa del 50% rispetto alla primaria.

6.2.4 SLC-N, Magnitudine 9

In questo caso non ci sono grandi variazioni rispetto al caso con magnitudine 7 e modello di GREENWOOD. La tecnica appare valida, con le limitazioni già accertate, anche per la magnitudine 9.

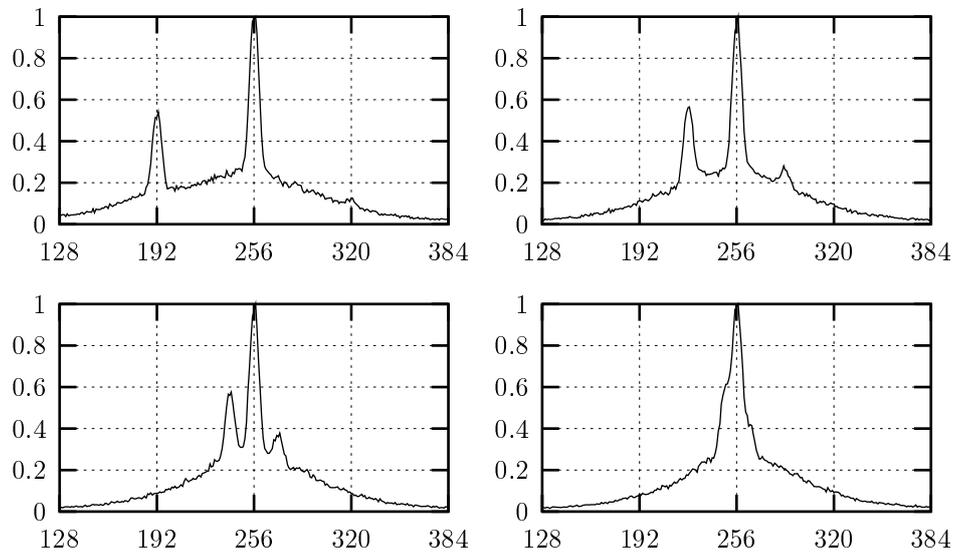


Figura 6.10: Stella doppia con separazione angolare di 0.65, 0.32, 0.16 e 0.08 secondi d'arco (da sinistra a destra e dall'alto in basso). Luminosità della secondaria metà della primaria. Magnitudine integrata 9, modello SLC-N.

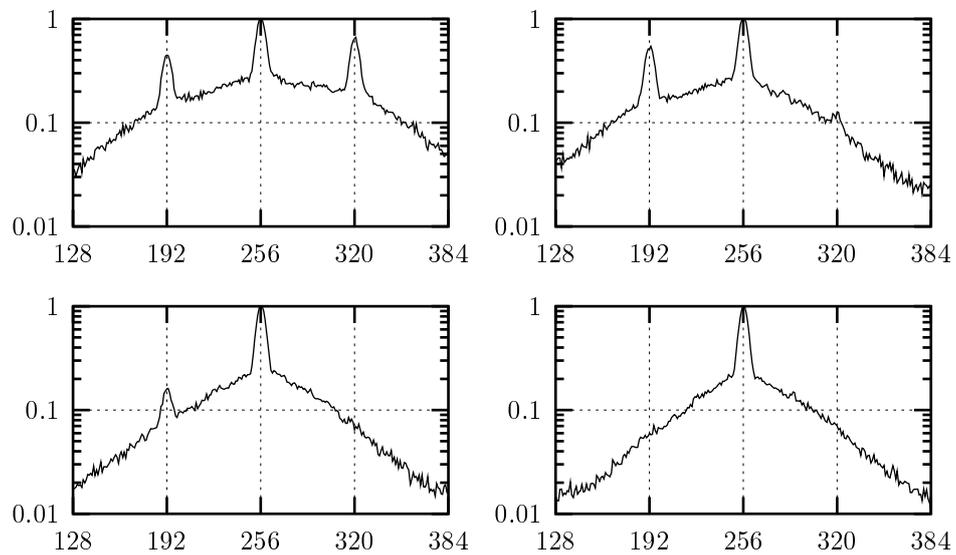


Figura 6.11: Stella doppia con separazione angolare di 0.65 secondi d'arco. Luminosità della secondaria 1.0, 0.5, 0.1 e 0.01 volte la primaria (da sinistra a destra e dall'alto in basso). Magnitudine integrata 11, modello SLC-N. Scala logaritmica.

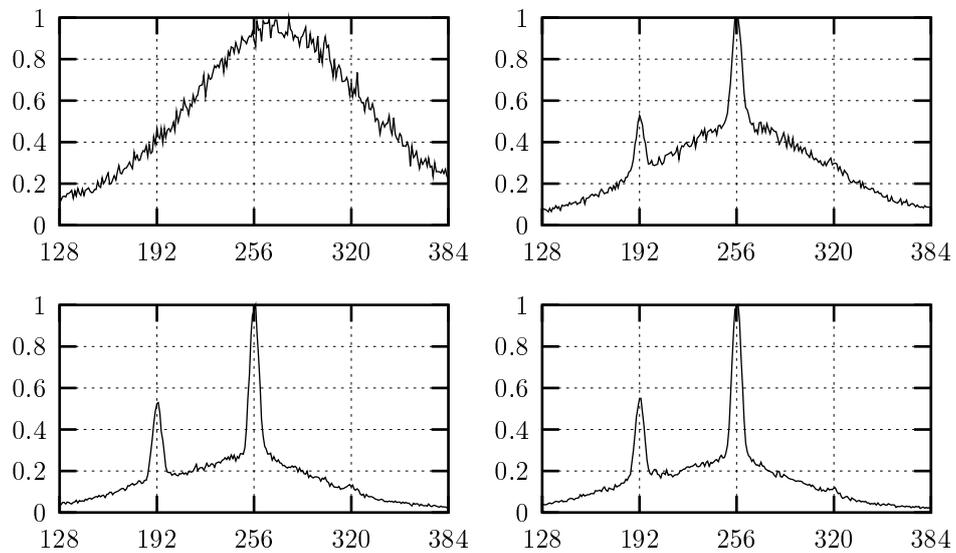


Figura 6.12: Stella doppia con separazione angolare di 0.65 secondi d'arco con primaria immersa in un halo con luminosità di picco 100, 1000, 10000, 100000 minore della primaria (da sinistra a destra e dall'alto in basso). Magnitudine integrata 11, modello SLC-N.

6.2.5 Conclusioni

Da quanto detto risulta evidente che la magnitudine limite per l'utilizzo della SAA in telescopi di diametro medio è la 9. Per tale luminosità il limite dell'intensità dell'alone fisico, per non pregiudicare il funzionamento della tecnica, è un millesimo della stella principale.

Sotto queste condizioni le capacità di risoluzione della SAA sono buone, anche se presentano alcuni difetti come la presenza di un alone artificiale e la formazione di immagini fantasma nel caso di stelle doppie. Inoltre è importante notare la resa fotometrica non perfetta.

6.3 Eliminazione del halo SAA per oggetti *point-source dominated*

Abbiamo visto che le immagini ottenute utilizzando la SAA soffrono della presenza di un alone artificiale¹ che ne inficia la rendita fotometrica.

Come mostrato in [4] per oggetti point-source dominated l'immagine in uscita dall'applicazione delle SAA può essere descritta come:

$$I(x, y) = O(x, y) * h_{\text{SAA}}(x, y) + n(x, y) \quad (6.1)$$

$h_{\text{SAA}}(x, y)$ è la PSF risultante composta da un alone di background e da un core diffraction-limited. La forma di questa può essere ottenuta facendo la SAA di un oggetto puntiforme. Il rumore additivo $n(x, y)$ può essere considerato a media nulla.

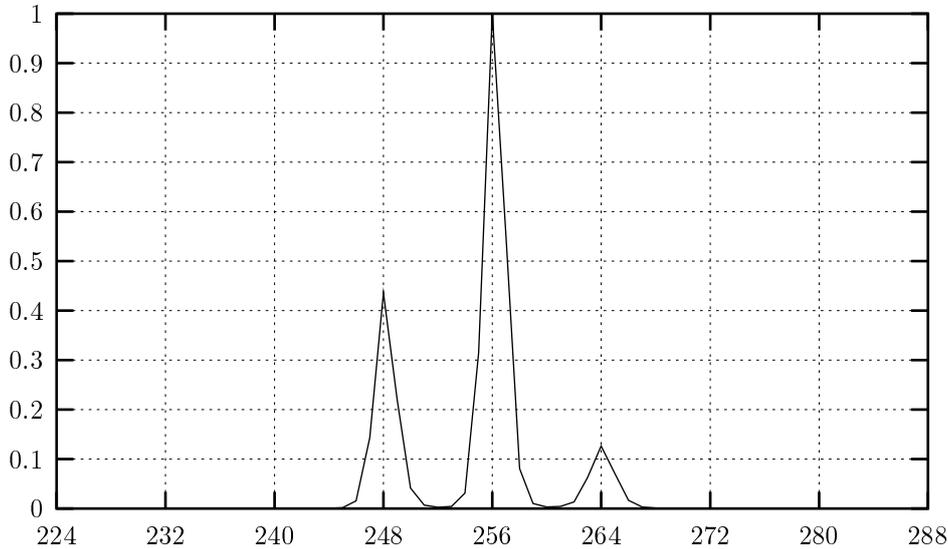


Figura 6.13: Deconvoluzione della SAA di una stella doppia con separazione $0.16''$. La magnitudine della doppia e della SAA di riferimento è 9, la pupilla è da 1.8 m e il tempo di esposizione è 4 s.

Una volta stimata la PSF è possibile utilizzare il metodo di RICHARDSON-LUCY per deconvolvere l'immagine rilevata. Per ottenere un buon risultato bisogna utilizzare una stella di magnitudine simile all'oggetto osservato nella stima della PSF. Inoltre è molto importante che dall'immagine vengano eliminati i pixel sovrastimati per l'effetto della statistica Poissoniana.

Un esempio di risultato ottenibile è presentato in figura 6.13. La deconvoluzione permette di eliminare l'alone, ma è sempre presente la falsa

¹È importante distinguere questo alone, che chiameremo halo SAA, da un eventuale alone fisico intrinseco all'oggetto.

immagine. La resa fotometrica è ancora imprecisa: questo può essere spiegato pensando che parte dell'energia della secondaria sia riversata nella falsa immagine.

Un altro problema di questo metodo è che l'eventuale alone di origine astrofisica viene inevitabilmente cancellato dall'applicazione del metodo. Questo è stato verificato ricorrendo a opportune simulazioni.

6.4 Discussione del SNR

In questa sezione discutiamo il rapporto SNR dell'immagine. Le modalità per ottenere questa informazione sono descritte nella sezione 5.2.1 a pagina 78. Innanzi tutto dobbiamo essere *molto* attenti a non confondere il rapporto segnale su rumore con l'effettivo successo del recupero. La tecnica SAA può fallire nel caso di oggetto a basso contrasto e comunque introduce una deformazione della morfologia dell'oggetto. Come abbiamo già visto (e approfondiremo in seguito) ci sono dei modi per recuperare tali difetti. Il rapporto SNR qui calcolato è il limite sulla qualità del recupero che ci possiamo aspettare dall'applicazione della SAA.

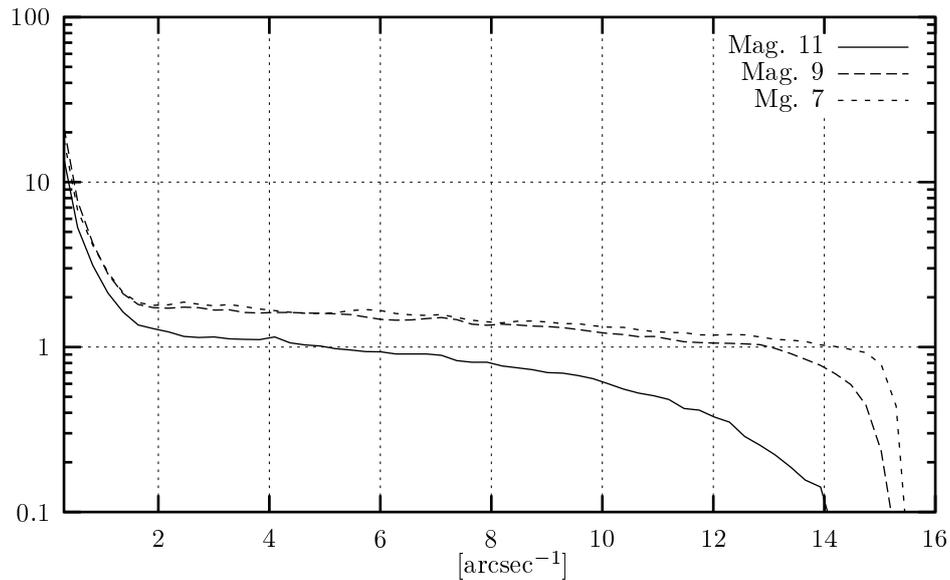


Figura 6.14: Rapporto SNR nel caso di pupilla da 1.8 m, con media di 25 frame in funzione della magnitudine dell'oggetto osservato. Ensemble di 50 realizzazioni.

Come si vede dalle figure, in linea di principio la SAA può dare buoni risultati per quello che riguarda il rapporto SNR risultante. Il punto cru-

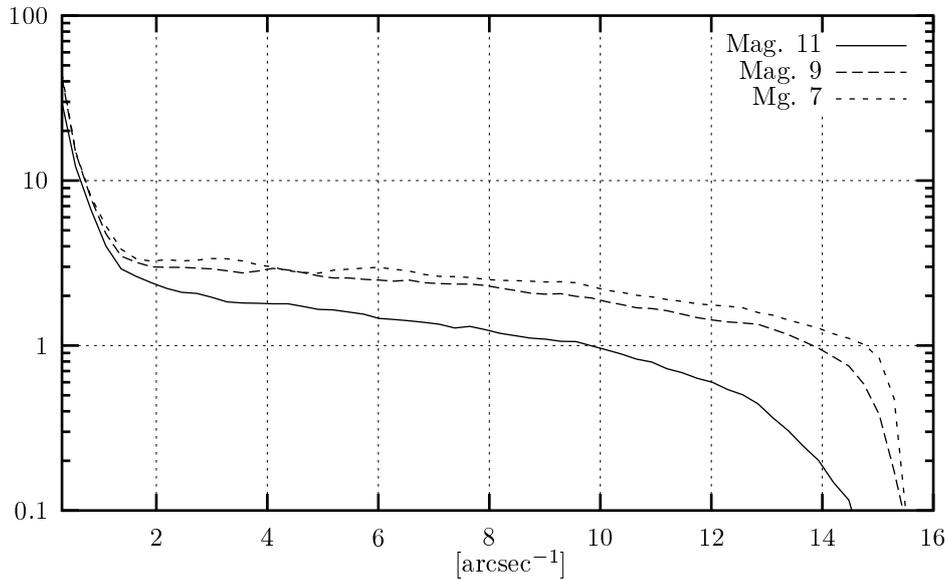


Figura 6.15: Rapporto SNR nel caso di pupilla da 1.8 m, con media di 100 frame in funzione della magnitudine dell'oggetto osservato. Ensemble di 50 realizzazioni.

ciale è capire se l'oggetto in questione può essere effettivamente risolto. La questione è già stata discussa nelle sezioni precedenti.

6.5 Discussione delle funzioni di sharpness

Una caratterizzazione utile della qualità dell'immagine recuperata è ottenuta mediante le funzioni di sharpness S_3 e S_4 . In figura 6.18 è riportato il risultato dell'applicazione della S_3 alle singole immagini *short-timed* (riga superiore) e al risultato cumulativo del recupero (riga inferiore). È chiaramente visibile la correlazione tra periodi di buon seeing² e di miglioramento della qualità del recupero cumulativo. In figura 6.19 è riportata la S_4 per il risultato cumulativo dell'applicazione della SAA. Vediamo che l'andamento rappresentato nel grafico è assai variabile. Inoltre vediamo che sia la S_3 che la S_4 soffrono del problema di partenza, ovvero della forte influenza del rumore sul valore di queste funzioni nei primi istanti dell'applicazione della SAA.

L'osservazione delle figure 6.18 e 6.19 ci suggerisce un metodo per migliorare il risultato ottenuto con la SAA mediante la selezione dei frame di migliore qualità. In questo lavoro è stata utilizzata la funzione S_4 come metrica della qualità dell'immagine.

² Nel senso della metrica della funzione S_3 .

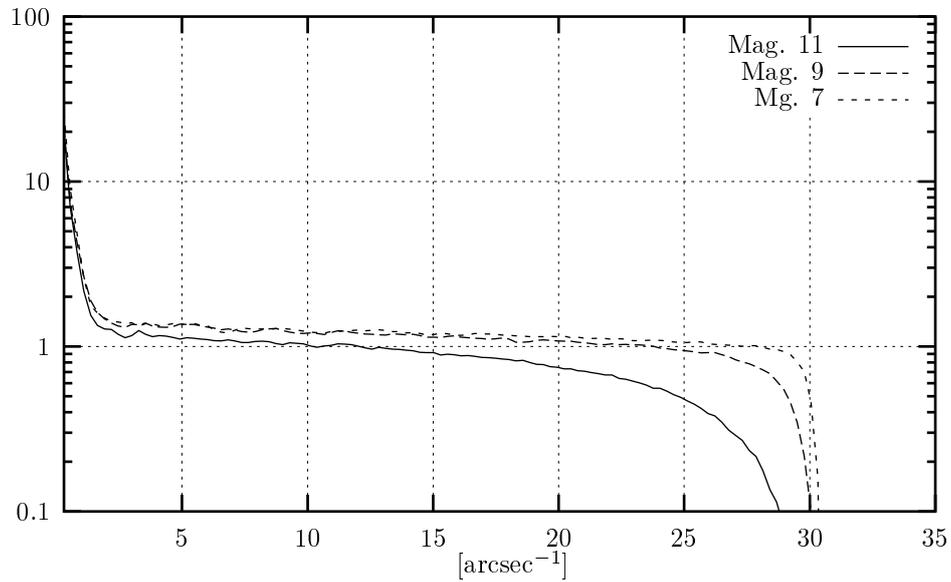


Figura 6.16: Rapporto SNR nel caso di pupilla da 3.5 m, con media di 25 frame in funzione della magnitudine dell'oggetto osservato. Ensemble di 50 realizzazioni.

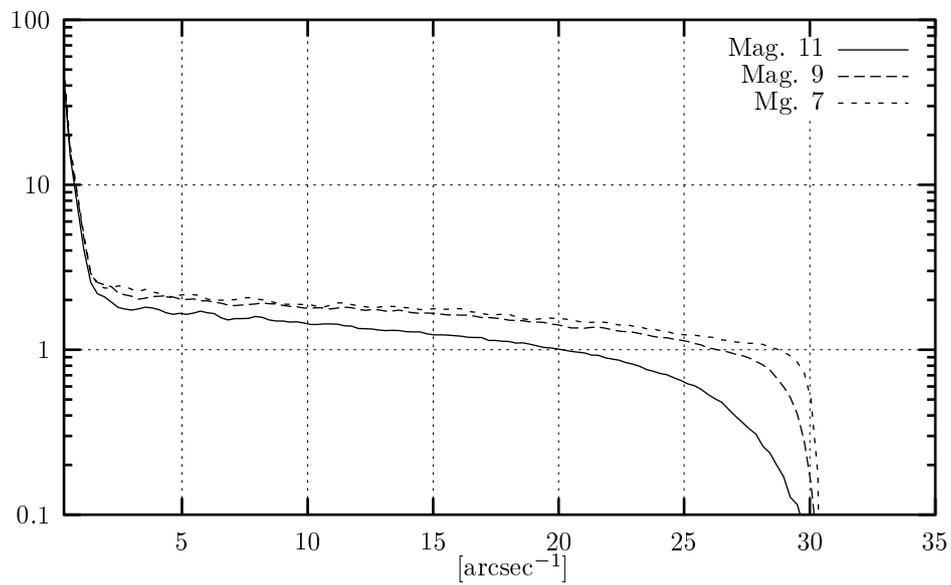


Figura 6.17: Rapporto SNR nel caso di pupilla da 3.5 m, con media di 100 frame in funzione della magnitudine dell'oggetto osservato. Ensemble di 50 realizzazioni.

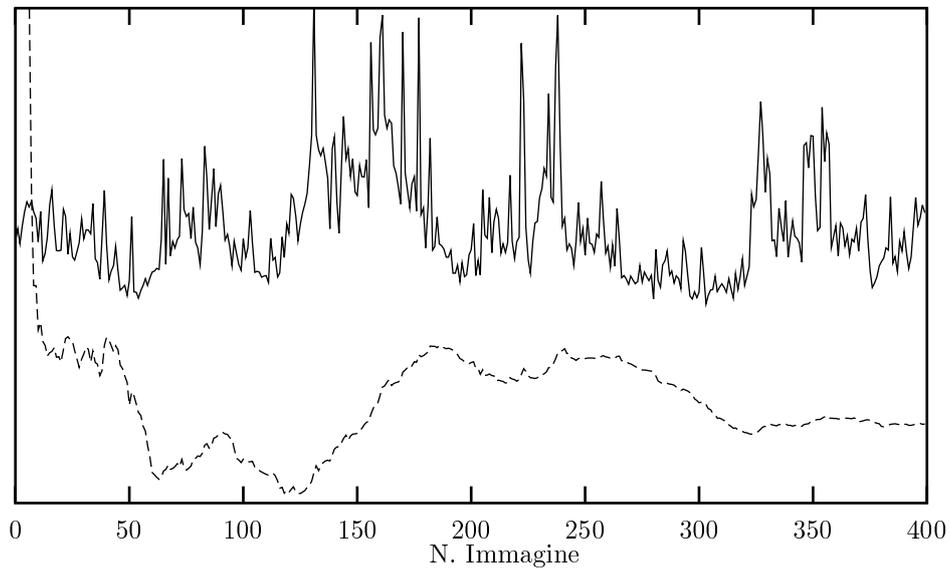


Figura 6.18: Valore della S_3 per una simulazione da 4 s e pupilla da 1.8 m. La riga superiore è il valore per il singolo frame, mentre quella inferiore si riferisce a risultato cumulativo della SAA.

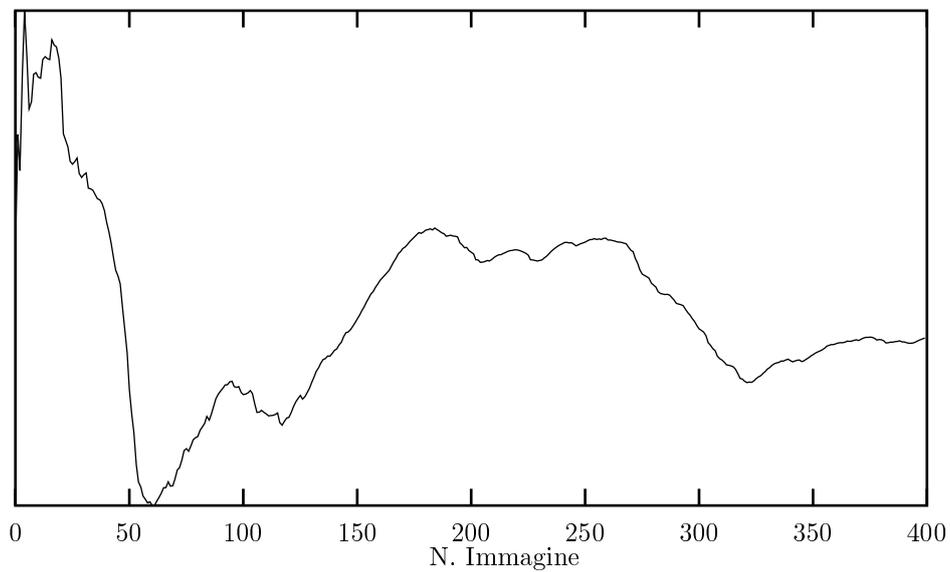


Figura 6.19: Valore della S_4 per una simulazione da 4 s e pupilla da 1.8 m.

- Dei frame simulati sono stati utilizzati solo quelli che migliorano la qualità del recupero cumulativo. Per evitare il problema della partenza è stato preventivamente calcolato il valore della funzione di sharpness tipico per un opportuno intervallo di tempo.
- Invece di accumulare tutti i frame in un'unica immagine finale, sono state utilizzate 2 di queste. Nella prima abbiamo accumulato le immagini per le quali la coordinata x del massimo è inferiore a quella del centroide e nella seconda le altre. Ovviamente in pratica quest'operazione deve essere fatta per entrambi gli assi, dato che non possiamo affermare a priori quale è la forma del sistema osservato.

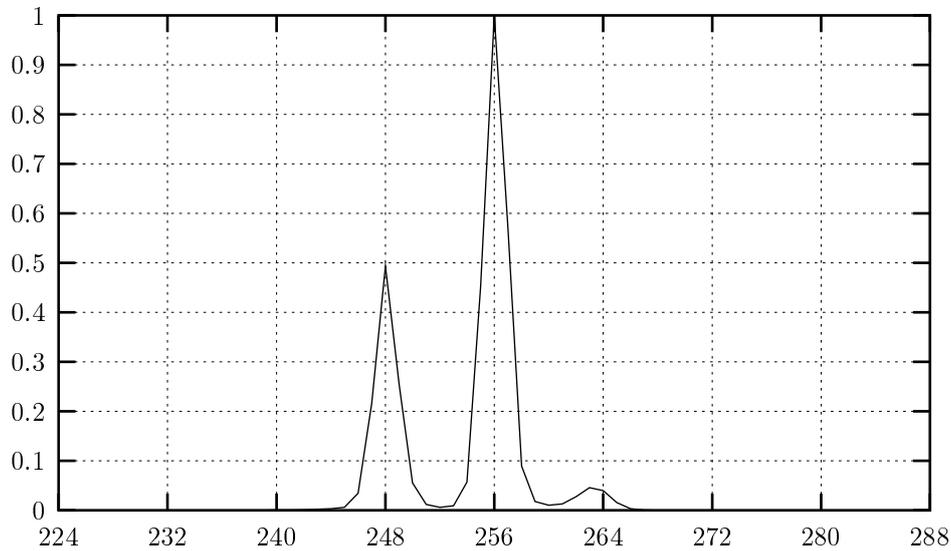


Figura 6.20: Deconvoluzione della SAA di una stella doppia con separazione $0.16''$. La magnitudine della doppia e della SAA di riferimento è 9, la pupilla è da 1.8 m e il tempo di esposizione è 20 s. Nell'esecuzione della SAA sono stati utilizzati i criteri di selezione dell'immagine descritti nel testo, che hanno portato ad un utilizzo del 27 % delle immagini acquisite.

Con queste modalità è stata simulata la stella doppia con separazione $0.16''$. Il risultato è stato poi deconvoluto con le modalità della sezione 6.3 e riportato in figura 6.20. Si vede il notevole miglioramento nella resa fotometrica (ora quasi perfetta) e la maggiore soppressione dell'immagine fantasma rispetto alla figura 6.13.

Il metodo migliora leggermente anche la situazione della stella doppia di uguale intensità (vedi figura 6.21). Le immagini risultanti mostrano una ripartizione simmetrica di energia tra la secondaria vera e l'immagine fan-

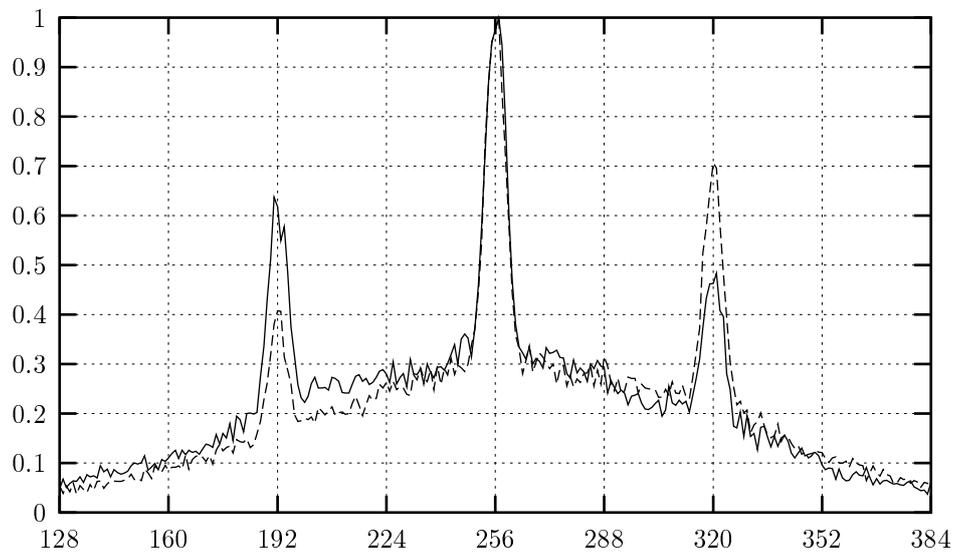


Figura 6.21: Esempio di utilizzo della selezione dei frame nel caso critico della doppia con componenti di uguale luminosità. La risposta fotometrica è comunque errata, ma almeno la differenza tra le 2 immagini può essere utile come strumento diagnostico.

tasma: questo può essere usato come diagnostica del caso di mancanza di contrasto tra le 2 componenti.

6.6 Riepilogo del lavoro svolto

Nella prima parte del capitolo è stato definito il campo applicativo della SAA. Le conclusioni, basate su una serie di simulazioni, sono presentate nella sezione 6.2.5. Dopodichè si è studiata la qualità del recupero ottenuto, qualora questo abbia effettivamente buon esito. Dai grafici che illustrano il rapporto segnale su rumore è risultata una buona resa del metodo.

Nell'ultima parte del capitolo sono stati affrontati vari accorgimenti, che permettono di superare, almeno in parte, i principali difetti della SAA: l'alone artificiale, le immagini fantasma e la resa fotometrica imprecisa.

Capitolo 7

Tecniche di *speckle interferometry*

Con l'espressione *speckle imaging* è indicata una vasta categoria di tecniche che mirano al recupero dell'immagine in osservazioni subatmosferiche. In generale queste consistono nella post-elaborazione di immagini a breve tempo di esposizione. In questo capitolo ci occuperemo in particolare delle tecniche di *speckle-interferometry* utilizzate per la risoluzione di binarie strette con elaborazione svolta nel dominio delle frequenze spaziali. Le modalità per ottenere l'immagine vera e propria dell'oggetto verranno brevemente presentate alla fine del capitolo.

7.1 *Speckle interferometry*

Riprendiamo ora l'equazione che governa la formazione dell'immagine scritta nel dominio delle frequenze:

$$I(\vec{f}) = \mathcal{H}(\vec{f}) O(\vec{f}) \quad (7.1)$$

Partendo da questa espressione possiamo passare alla media di *ensemble* dello spettro di potenza:

$$\langle |I(\vec{f})|^2 \rangle = \langle |\mathcal{H}(\vec{f})|^2 \rangle |O(\vec{f})|^2 \quad (7.2)$$

Vediamo che lo spettro di potenza dell'immagine è modificato dalla funzione $\langle |\mathcal{H}(\vec{f})|^2 \rangle$. Supponiamo però di calcolare la media dello spettro di potenza di una sorgente puntiforme, ovvero approssimabile da una delta di DIRAC. La trasformata di FOURIER della delta di DIRAC è una funzione costante, quindi abbiamo:

$$\langle |I_R(\vec{f})|^2 \rangle = \langle |\mathcal{H}^2(\vec{f})|^2 \rangle C_R \quad (7.3)$$

Questo vale, ovviamente, se le proprietà statistiche che determinano il seeing nei 2 casi sono identiche. Adesso possiamo dividere la 7.2 con la 7.3 per eliminare la funzione di trasferimento dell'atmosfera e ottenere l'espressione dello spettro di potenza dell'oggetto:

$$|O(\vec{f})|^2 = \frac{C_R \langle |I(\vec{f})|^2 \rangle}{\langle |I_R(\vec{f})|^2 \rangle} \quad (7.4)$$

Questo è il risultato fondamentale che stà alla base del metodo di LABEYRE per l'interferometria a speckle.

Per applicare quanto detto al caso di stella doppia bisogna innanzi tutto valutare lo spettro di potenza dell'immagine di questa. A questo scopo descriviamo la stella doppia mediante un semplice modello a 2 delta di DIRAC:

$$o(\vec{x}) = d_1 \delta(\vec{x} - \vec{x}_1) + d_2 \delta(\vec{x} - \vec{x}_2) \quad (7.5)$$

Ora è semplice calcolare lo spettro di potenza nel caso di stella doppia:

$$|O(\vec{f})|^2 = \frac{d_1^2 + d_2^2 + 2d_1 d_2 \cos(2\pi \vec{f} \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2))}{(d_1 + d_2)^2} \quad (7.6)$$

$$\equiv A + B \cos(2\pi \vec{f} \cdot \vec{s}) \quad (7.7)$$

Confrontando la 7.6 con la 7.4 possiamo ricavare il rapporto di luminosità (mediante il rapporto tra A e B visto che è difficile valutare C_R), la separazione e l'angolo di posizione. Notiamo che il primo parametro è il più difficile da valutare, visto che dipende da una precisa misura di A e B , che a loro volta possono essere valutati precisamente solo se gli spettri integrati sono di buona qualità. La determinazione del vettore di separazione \vec{s} è invece legato alla buona visibilità delle frange di interferenza.

7.1.1 Effetti del rumore

Se vogliamo considerare gli effetti del rumore dobbiamo sostituire lo spettro di potenza dell'immagine osservata con un opportuno stimatore. Questo fatto appare chiaro se calcoliamo lo spettro di potenza di un processo stocastico doppiamente Poissoniano (vedi [36]). Lo stimatore quindi assume la forma:

$$Q(\vec{f}) = |I(\vec{f})|^2 - K - P\sigma_P \quad (7.8)$$

dove $|I(\vec{f})|^2$ è l'immagine rilevata in presenza di rumore, K è il numero di foto-eventi nell'immagine, P è il numero di pixel per immagine e σ_P

è il rumore additivo per pixel. L'equazione fondamentale del metodo di LABEYRE diventa quindi:

$$A + B \cos(2\pi \vec{f} \cdot \vec{s}) \propto \frac{Q(\vec{f})}{Q_R(\vec{f})} \quad (7.9)$$

A questo punto è importante, ai fini della valutazione della qualità del risultato, il calcolo del rapporto segnale-rumore dello stimatore $Q(\vec{f})$ in funzione della magnitudine e dei parametri atmosferici. Mi limiterò a riportare l'espressione ricavata in [36]:

$$\begin{aligned} \text{SNR}_Q(\vec{f}) &= \overline{K}^2 \left\langle |\mathcal{H}(\vec{f})|^2 \right\rangle |O_n(\vec{f})|^2 \times \left(\overline{K}^2 + \overline{K}^2 \left\langle |\mathcal{H}(2\vec{f})|^2 \right\rangle \right. \\ &\quad \left. |O_n(2\vec{f})|^2 + 2\overline{K}^3 \left\langle |\mathcal{H}(\vec{f})|^2 \right\rangle |O_n(\vec{f})|^2 + \overline{K}^4 \left(\left\langle |\mathcal{H}(\vec{f})|^4 \right\rangle \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left\langle |\mathcal{H}(\vec{f})|^2 \right\rangle^2 \right) |O_n(\vec{f})|^4 + P\sigma_P^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (7.10)$$

Com'è facilmente intuibile data la complessità di questa formula, l'unico metodo pratico per valutare il SNR è utilizzare delle simulazioni.

7.1.2 Risultati delle simulazioni

La tecnica di LABEYRE è stata provata su una serie simulata di speckle atmosferiche. Come obiettivo è stata scelta una doppia con separazione $0.1618''$, angolo di posizione 45° e magnitudine integrata 8. Il rapporto di luminosità delle componenti è 2. La stella di riferimento, di magnitudine 6, è stata posta a $100''$, quindi ben al di fuori del campo di isoplanatismo. I calcoli sono stati eseguiti sulla media di 100 interferogrammi, quindi la durata totale della simulazione è 1 s. In figura 7.1 è graficato il rapporto $\frac{Q(\vec{f})}{Q_R(\vec{f})}$ per una pupilla da 1.8 m, metri in figura 7.3 è riportato quello per una pupilla da 3.5 m.

Innanzitutto precisiamo meglio la notazione introdotta nell'espressione 7.6. Se chiamiamo $\alpha = \frac{d_1}{d_2}$ il rapporto di luminosità tra le 2 componenti, possiamo riscrivere quest'equazione nella forma:

$$R \equiv \frac{A}{B} = \frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha} \quad (7.11)$$

In questo modo abbiamo il vantaggio di poter trascurare i fattori moltiplicativi impliciti nella 7.9¹. Il rapporto di luminosità si ricava risolvendo l'equazione di secondo grado:

$$\alpha^2 - 2R\alpha + 1 = 0 \quad (7.12)$$

¹La luminosità totale del sistema può comunque essere trovata utilizzando tecniche fotometriche convenzionali.

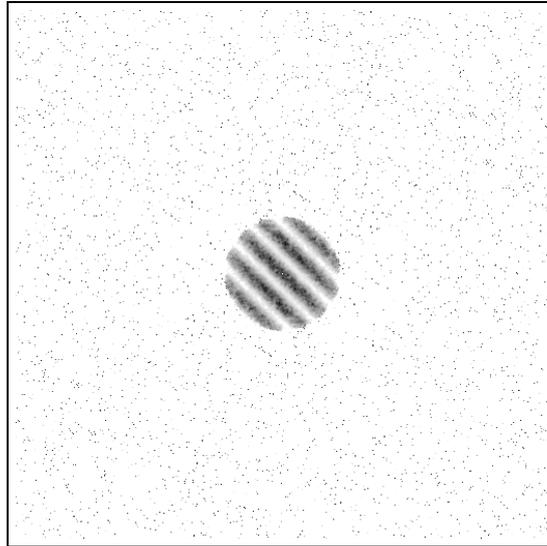


Figura 7.1: *Speckle Interferogram* di una doppia con separazione $0.1618''$. Media di 100 frame da un centesimo di secondo, pupilla da 1.8 m. Lo spettro di potenza in uscita è già stato calibrato per mezzo di una stella di riferimento. Si nota la frequenza di taglio della OTF dello strumento.

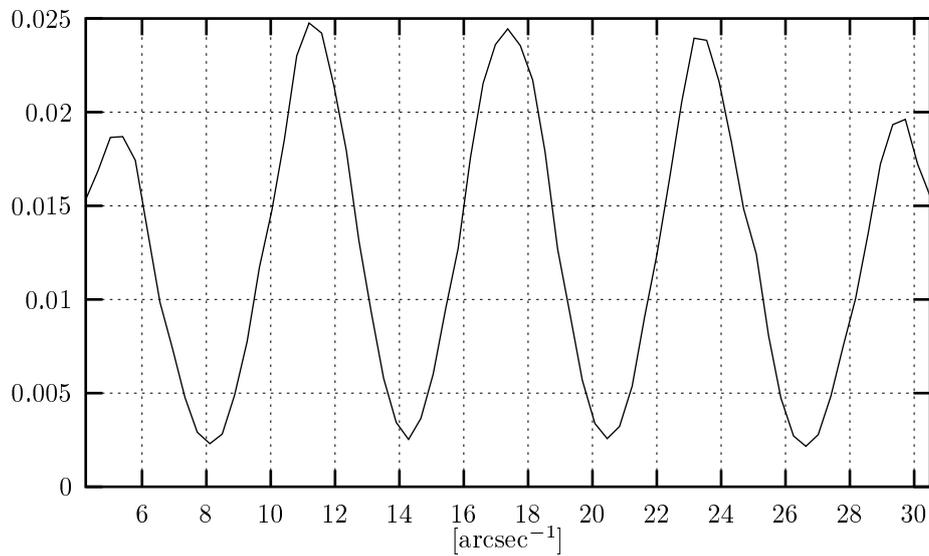


Figura 7.2: Sezione diagonale della parte centrale di figura 7.1. È stata mediata una striscia da 20 pixel. Si nota una residua modulazione della sinusoide, dovuta al fatto che la calibrazione non elimina del tutto l'effetto del sistema telescopio+atmosfera.

Quindi le soluzioni per α sono:

$$\alpha = R \pm \sqrt{R^2 - 1} \quad (7.13)$$

Il fatto che ci siano 2 soluzioni ci conferma l'incapacità del metodo di distinguere tra secondaria e primaria: l'informazione è codificata nella fase della trasformata di FOURIER e quindi irrimediabilmente persa dal metodo di LABEYRE.

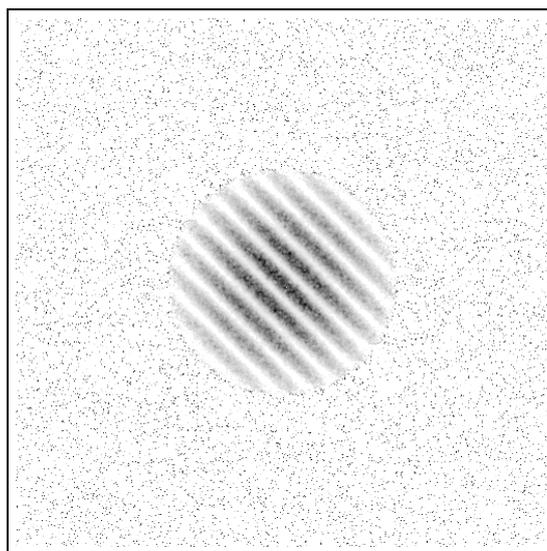


Figura 7.3: *Speckle Interferogram* di una doppia con separazione $0.1618''$. Media di 100 frame da un centesimo di secondo, pupilla da 3.5 m. Lo spettro di potenza in uscita è già stato calibrato per mezzo di una stella di riferimento. Si nota la frequenza di taglio della OTF dello strumento.

La procedura operativa di calcolo dei parametri si articola in 2 fasi:

- Vengono calcolati gli interferogrammi risultanti. Dai singoli spettri di potenza viene sottratto il bias dovuto al rumore. L'interferogramma della doppia viene diviso per quello della stella di riferimento.
- La parte centrale del risultato (una regione 40×40) di miglior qualità viene fittata alla funzione:

$$g(x, y) = A + B \cos(2\pi(xf \sin \theta + yf \cos \theta)) \quad (7.14)$$

dove θ è l'angolo di posizione. La separazione s si ricava con la formula:

$$s = \frac{f}{0.273} \quad (7.15)$$

che tiene conto del formato dell'immagine. Infine il rapporto di luminosità viene calcolato utilizzando le espressioni 7.11 e 7.13.

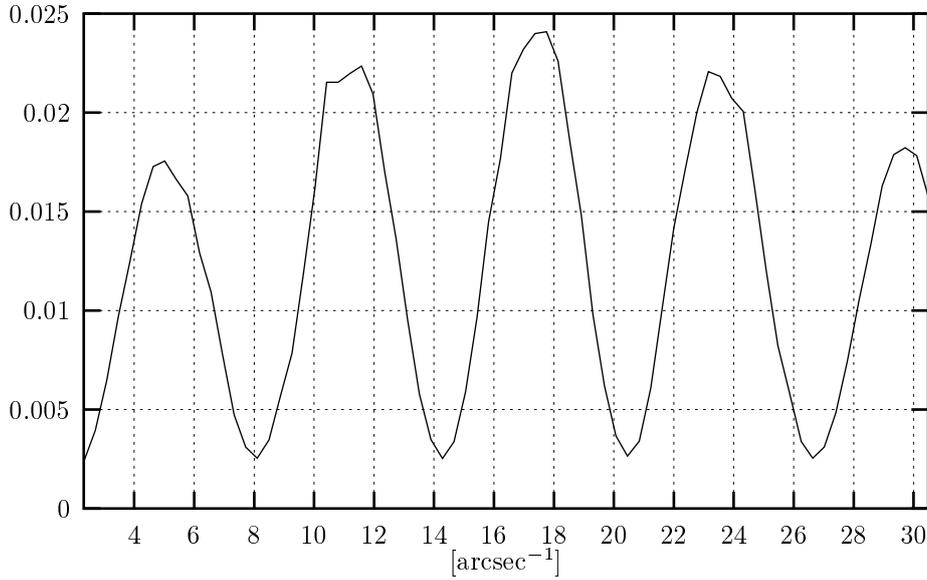


Figura 7.4: Sezione diagonale della parte centrale di figura 7.3. È stata mediata una striscia da 20 pixel. Si nota una residua modulazione della sinusoide, dovuta al fatto che la calibrazione non elimina del tutto l'effetto del sistema telescopio+atmosfera.

- Per quanto riguarda gli errori dei parametri (intesi come deviazioni standard) l'algoritmo di fit ci da in uscita σ_A , σ_B , σ_f e σ_θ . Da questi ricaviamo $\sigma_s = \frac{\sigma_f}{0.273}$ e, approssimando:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &\approx \sigma_R \\ &= \frac{\sqrt{B^2\sigma_A^2 + A^2\sigma_B^2}}{B^2}. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Pupilla da 1.8 m. L'elaborazione della simulazione ci da in questo caso una separazione di $0.1631'' \pm 0.0003$, un angolo di posizione di $45.14^\circ \pm 0.12$ e un rapporto di luminosità di 1.92 ± 0.02 . I risultati sono in buon accordo con i dati in entrata alla simulazione.

Pupilla da 3.5 m. L'elaborazione della simulazione ci da in questo caso una separazione di $0.1617'' \pm 0.0004$, un angolo di posizione di $44.31^\circ \pm 0.14$ e un rapporto di luminosità di 2.09 ± 0.03 . I risultati sono in buon accordo con i dati in entrata alla simulazione.

Discussione del SNR

Nelle figure 7.5 e 7.6 è rappresentato l'andamento del rapporto segnale su rumore in funzione della frequenza spaziale per pupille di 1.8 m e 3.5 m e per diverse magnitudini. La variabile analizzata nei grafici è lo stimatore $Q(f)$. La procedura per ottenere questi grafici è dettagliata a pagina 78.

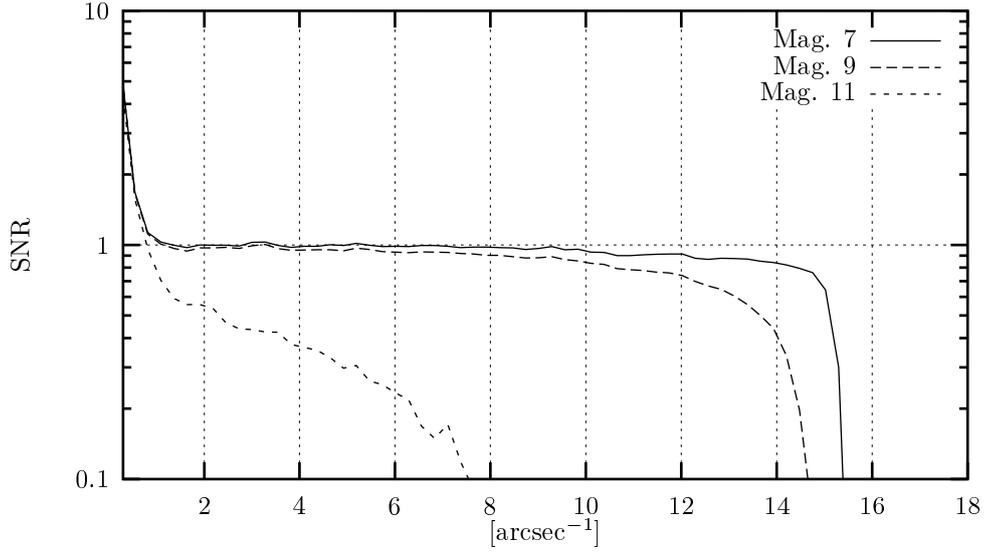


Figura 7.5: $\text{SNR}_Q(f)$ nel caso di pupilla con diametro 1.8 m.

I grafici si riferiscono ad uno singolo spettro di potenza. Per migliorare il rapporto SNR risultante si possono mediare più misure dello spettro. Nel caso che queste siano indipendenti si avrà:

$$\text{SNR}_Q^N(f) = \sqrt{N} \text{SNR}_Q(f) \quad (7.17)$$

In pratica per l'ipotesi di Taylor possiamo affermare che almeno per piccoli intervalli temporali il seeing è statisticamente correlato e quindi il miglioramento che ci possiamo aspettare è leggermente inferiore a quanto previsto dalla 7.17.

7.1.3 Risultati osservativi

In questa sezione saranno analizzate alcune osservazioni effettuate alla *speckle facility* del Telescopio Nazionale Galileo. Queste mi sono state gentilmente messe a disposizione dal DR. ROBERTO RAGAZZONI dell'Osservatorio Astronomico di Padova. Il sistema è stato montato al fuoco NASMYTH del TNG. Il sistema è composto dal modulo a ottica adattiva (AdOpt@TNG) collegato a 3 calcolatori in linea che acquisiscono e elaborano immagini a

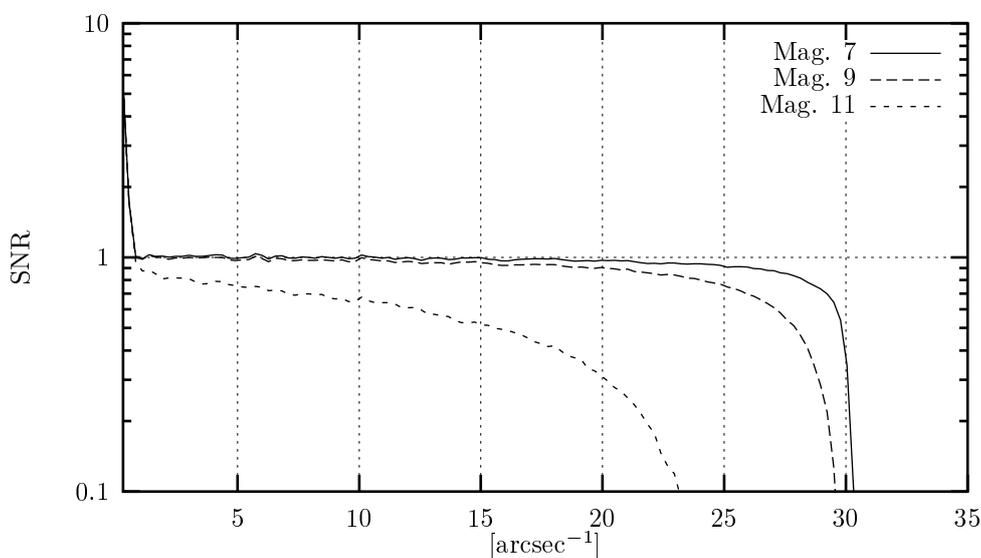


Figura 7.6: $\text{SNR}_Q(f)$ nel caso di pupilla con diametro 3.5 m.

breve tempo di esposizione. I calcolatori permettono l'esecuzione di varie operazioni in *real-time* tra le quali la *Shift-and-Add Analysis* e l'accumulo dello spettro di potenza.

Il sistema è assai giovane (le prime osservazioni sono state effettuate il 14. dicembre 1998) e presenta ancora dei problemi. I dati che saranno presentati si riferiscono ad un solo calcolatore (quindi ad un terzo del segnale totale a disposizione). L'opzione SAA non risulta ancora funzionante, probabilmente a causa di pixel rumorosi per motivi elettrici che confondono l'algoritmo di ricerca del massimo ([27]).

La stella osservata è la doppia HD30869, mentre i frame di riferimento si riferiscono alla HD28319. La prima è di magnitudine 6.27, mentre per la seconda è 3.41. Le 2 stelle sono state osservate attraverso diversi filtri, centrati rispettivamente sulle righe H_α , ZrO e C_2 . Le condizioni di seeing durante le osservazioni erano assai scarse (tra $1.5''$ e $3''$)².

La calibrazione mediante stella di riferimento è risultata inadeguata, probabilmente per delle condizioni di seeing troppo variabili. Inoltre le immagini sono affette da un fastidioso rumore periodico di natura non ben definita. Per ciò in questa sede ricaviamo solo la separazione e l'angolo di posizione. A questo scopo è stato scritto un programma che permette, utilizzando una griglia sovrapposta alle immagini riportate in figura 7.7, di valutare il periodo spaziale in pixel e l'angolo di posizione³. Infine, utilizzando il fatto

²Vedi <http://www.tng.iac.es/html/documents/tngdocpub/adopt/adoptfl.html>.

³In condizioni di segnale rumoroso e non ben definito non esiste ancora nessun strumento euristico-algoritmico che eguagli le capacità dell'occhio.

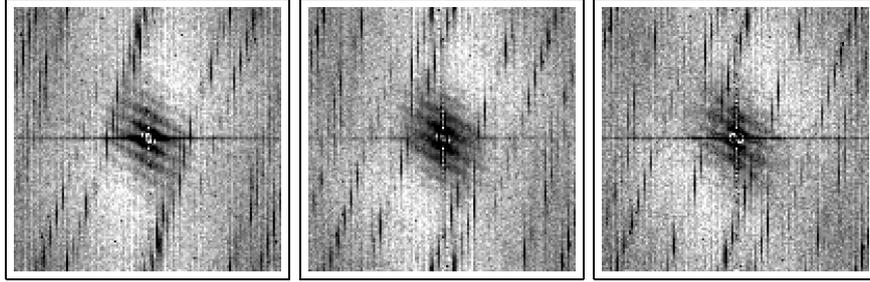


Figura 7.7: *Speckle interferometry* della stella doppia HD30869 ottenute col TNG. Lo spettro di riferimento è quello della HD28319 (θ_2 Tau). Da sinistra a destra sono stati utilizzati filtri centrati sulla riga H_α , ZrO e C_2 .

che ogni pixel corrisponde a $0.0268''$ possiamo esprimere la separazione in secondi d'arco. Facendo più misure sulle 3 immagini è possibile associare un errore al nostro risultato. In definitiva quindi ricavo una separazione di $0.50'' \pm 0.01$ e un angolo di posizione 29.8 ± 1.6 .

7.1.4 Riepilogo del lavoro svolto

In questo capitolo è stato affrontato, sempre utilizzando una serie di simulazioni, il metodo della *speckle-interferometry* specializzato al caso delle stelle doppie. I risultati, in termini di rapporto segnale su rumore, sono molto buoni.

La seconda parte è stata dedicata all'elaborazione di dati molto recenti provenienti dal *Telescopio Nazionale Galileo*. Nonostante alcune difficoltà la procedura ha dato esito positivo e i risultati sono compatibili con quelli ottenuti da altri osservatori.

7.2 Cenni di *speckle-imaging*

Le tecniche viste fino ad ora si basano sullo studio del quadrato del modulo dell'immagine a breve tempo di esposizione, quindi perdono l'informazione sulla fase delle varie componenti armoniche dell'analisi di FOURIER. Se vogliamo ottenere un'immagine vera e propria dell'oggetto osservato dobbiamo recuperare questa informazione mancante.

Il metodo per ottenere l'informazione sulla fase è calcolare dei momenti di ordine superiore al secondo per l'immagine, i quali codificano l'informazione desiderata. I momenti utilizzati sono il *cross-spectrum* e il *bispectrum*.

Il cross-spectrum⁴ è definito come:

$$C(\vec{f}, \Delta\vec{f}) = I(\vec{f}) I^*(\vec{f} + \Delta\vec{f}) \quad (7.18)$$

⁴Questo approccio allo speckle-imaging viene anche detto metodo di KNOX-THOMPSON.

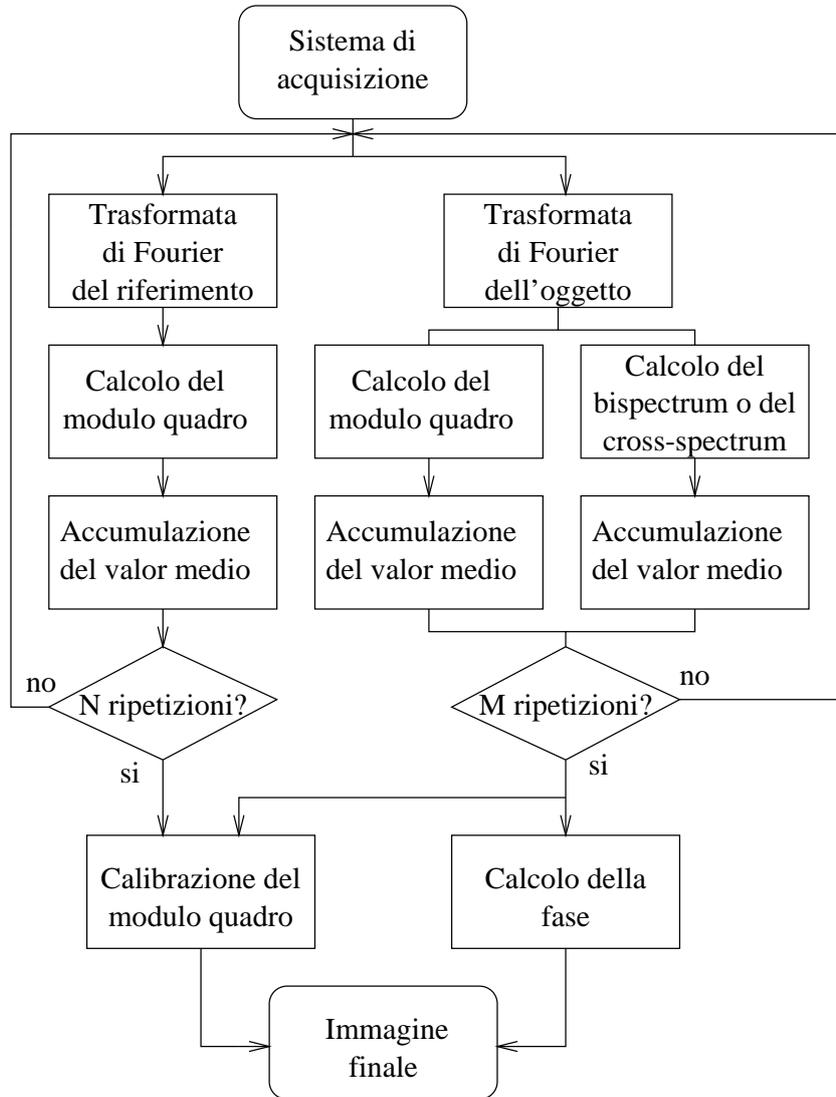


Figura 7.8: Rappresentazione schematica di un sistema per lo speckle-imaging.

dove $I(\vec{f})$ è lo spettro dell'immagine a breve tempo di esposizione. Si può dimostrare che vale l'espressione:

$$\begin{aligned} \langle C(\vec{f}, \Delta\vec{f}) \rangle &= |O(\vec{f})| |O(\vec{f} + \Delta\vec{f})| e^{j(\phi_O(\vec{f}) - \phi_O(\vec{f} + \Delta\vec{f}))} \\ &\quad \times \langle \mathcal{H}(\vec{f}) \mathcal{H}^*(\vec{f} + \Delta\vec{f}) \rangle \end{aligned} \quad (7.19)$$

Si dimostra che $\langle \mathcal{H}(\vec{f}) \mathcal{H}^*(\vec{f} + \Delta\vec{f}) \rangle$ è reale. Si può vedere che la fase della media d'ensemble del cross-spectrum codifica la fase dell'oggetto osservato:

$$\phi_C(\vec{f}, \Delta\vec{f}) = \phi_O(\vec{f}) - \phi_O(\vec{f} + \Delta\vec{f}) \quad (7.20)$$

In pratica ci sono parecchi dettagli tecnici da affrontare prima di poter utilizzare efficacemente questa tecnica:

- Per dati affetti da rumore Poissoniano deve essere introdotto uno stimatore *unbiased* del cross-spectrum:

$$C_U(\vec{f}, \Delta\vec{f}) = I(\vec{f}) I^*(\vec{f} + \Delta\vec{f}) - I^*(\Delta\vec{f}) \quad (7.21)$$

In compenso un rumore additivo a media nulla non modifica lo stimatore del cross-spectrum.

- Si può vedere che la funzione di cross-spectrum non è spazio-invariante (nel dominio dei dati). Allora è importante eliminare il tip-tilt dell'immagine prima di procedere al calcolo della funzione e alla media di più realizzazioni di questa.
- C'è una serie di sottili dettagli quando si utilizza la 7.20 per ricavare la fase dell'oggetto. Consideriamo il caso pratico in cui il cross-spectrum viene valutato su un supporto discreto. Notiamo che $C_U(\vec{f}, \Delta\vec{f})$ è una funzione quadridimensionale e quindi le necessità di memoria per immagazzinare tale *ennupla* è imponente anche per formati dell'immagine modesti. Possiamo allora limitarci a valutare solo una parte degli elementi di quest'ennupla e utilizzare una scomposizione dei percorsi nello spazio delle frequenze per valutare la fase su tutto il range di frequenze dell'immagine. Purtroppo questo non funziona bene per immagini con basso livello di luminosità, dato che per aumentare il SNR è necessario utilizzare la media della fase ricavata su più scomposizioni indipendenti.

Nella scelta delle scomposizioni ottimali va comunque considerato il fatto che $C_U(\vec{f}, \Delta\vec{f})$ diventa piccolo per $|\Delta\vec{f}| > \frac{r_0}{\lambda}$ (vedi [36]). Come punto di partenza per la ricostruzione della fase si utilizza la frequenza spaziale 0, per la quale la fase deve essere nulla.

Una tecnica alternativa è utilizzare il cosiddetto *bispectrum*. Questo è definito come:

$$B(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = I(\vec{f}_1) I(\vec{f}_2) I^*(\vec{f}_1 + \vec{f}_2) \quad (7.22)$$

Facendo la media di ensemble otteniamo:

$$\begin{aligned} \langle B(\vec{f}_1, \vec{f}_2) \rangle &= |O(\vec{f}_1)| |O(\vec{f}_2)| |O(\vec{f}_1 + \vec{f}_2)| e^{j(\phi_O(\vec{f}_1) + \phi_O(\vec{f}_2) - \phi_O(\vec{f}_1 + \vec{f}_2))} \\ &\times \langle \mathcal{H}(\vec{f}_1) \mathcal{H}(\vec{f}_2) \mathcal{H}^*(\vec{f}_1 + \vec{f}_2) \rangle \end{aligned} \quad (7.23)$$

Anche in questo caso l'applicazione pratica deve tenere conto di parecchie questioni tecniche:

- Lo stimatore *unbiased* è in questo caso:

$$\begin{aligned} B_U(\vec{f}_1, \vec{f}_2) &= I(\vec{f}_1) I(\vec{f}_2) I^*(\vec{f}_1 + \vec{f}_2) - |I(\vec{f}_1)|^2 \\ &\quad - |I(\vec{f}_2)|^2 - |I(\vec{f}_1 + \vec{f}_2)|^2 + 2K + 3P\sigma_n^2 \end{aligned} \quad (7.24)$$

dove K è il numero di fotoeventi per immagine, P il numero di pixel e σ_n^2 la varianza del rumore additivo.

- Le esigenze di memoria e di calcolo del *bispectrum* possono essere notevolmente diminuite notando che $B(\vec{f}_1, \vec{f}_2)$ ha una simmetria ottupla e che il valore della funzione diventa piccolo per $|\vec{f}_1 - \vec{f}_2| < \frac{r_0}{\lambda}$.
- Per ricostruire la fase dobbiamo utilizzare la relazione:

$$e^{j\phi_O(\vec{f}_1 + \vec{f}_2)} = e^{j\phi_O(\vec{f}_1)} e^{j\phi_O(\vec{f}_2)} e^{j\phi_B(\vec{f}_1, \vec{f}_2)} \quad (7.25)$$

Non è possibile fare i calcoli direttamente in termini di fase dato che il valore del bispectrum è definito solo modulo 2π . Inoltre nella fase di ricostruzione dobbiamo porre anche $\phi_O(0, \pm\Delta f) = 0$ e $\phi_O(\pm\Delta f, 0) = 0$ come valori iniziali per poter sfruttare questa espressione ricorsiva. L'immagine ottenuta è quindi una versione traslata di quella iniziale.

Entrambi i metodi qui abbozzati non necessitano di calibrazione mediante stella di riferimento. Una volta ottenuta la fase $\phi_O(\vec{f})$ possiamo passare allo spettro:

$$O(\vec{f}) = |O(\vec{f})| e^{j\phi_O(\vec{f})} \quad (7.26)$$

e utilizzando un'ultima antitrasformata di FOURIER ricostruire l'immagine dell'oggetto.

Capitolo 8

Conclusioni

Nella prima parte di questo lavoro sono stati presentati i principali problemi inerenti all'acquisizione di immagini ad alta risoluzione spaziale con l'utilizzo di telescopi situati sulla superficie terrestre. I risultati sono stati ottenuti per la maggior parte utilizzando simulazioni al computer. Queste permettono di modellizzare in modo soddisfacente il fenomeno *seeing* senza le semplificazioni necessarie per qualsivoglia modello analitico ragionevole. Buona parte del lavoro in questa fase è consistito nello sviluppare un ambiente di simulazione efficiente. Inoltre è stato necessario validarne i risultati mediante confronto con le predizioni analitiche, nei casi in cui queste siano disponibili, e con le osservazioni empiriche.

I principali risultati ottenuti possono essere compendati come segue:

- Le alte frequenze spaziali sono irrimediabilmente perse nelle immagini a lungo tempo di esposizione (vedi i profili della PSF nella sezione 4.5.1). L'unico modo per poter recuperarle è passare a immagini a breve esposizione. Il tempo caratteristico che ci permette di distinguere tra i due regimi è detto *boiling-time* ed è ricavato nella sezione 4.5.3.
- I parametri che influiscono sulla capacità di recuperare un oggetto astronomico sono la sua magnitudine, la sua morfologia e il diametro della pupilla. La magnitudine dell'oggetto osservato è ancora più importante rispetto alle tecniche standard di acquisizione, dato che non ci possiamo permettere di aumentare il tempo di integrazione. Il parametro morfologico più influente è il contrasto superficiale: se questo è basso il recupero delle immagini diventa più critico (vedi la discussione nella sezione 4.6). Infine il diametro della pupilla non influisce solo sul numero di fotoni raccolto ma anche, quando rapportato al parametro di FRIED r_0 , sulla forma vera e propria dell'immagine a *speckle* (vedi sezione 4.5.5).
- Un importante parametro analizzato (sezione 4.5.4) è l'angolo di iso-

planatismo, il quale determina la regione di cielo nella quale l'immagine viene affetta allo stesso modo dal seeing.

- Inoltre è stato posto l'accento sull'importanza della correzione dei momenti di ZERNIKE più bassi (*tip* e *tilt*, escludendo il momento di *piston* che non ha importanza effettiva) grazie all'analisi riportata nella sezione 4.5.2.

Nel capitolo 5 sono state affrontate le tecniche di correzione del seeing che necessitano di una sorgente di riferimento per poter operare. Innanzi tutto abbiamo visto l'impossibilità di utilizzare stelle guida naturali, se non in casi particolari, dato il ridotto angolo di isoplanatismo. Il ricorso a stelle di guida laser non risolve però alcuni problemi:

- L'utilizzo di stelle laser presenta costi molto elevati. Lo stesso vale per la realizzazione di ottiche adattive. Inoltre queste soffrono di limitazioni di tipo meccanico, come limitato numero di gradi di libertà e tempo di risposta breve, ma non trascurabile.
- Realizzazioni *software* della deconvoluzione devono limitarsi a algoritmi semplici se vogliono operare in *real-time*. Altrimenti è necessario passare a sistemi operanti in *post-processing* che richiedono grandi capacità di memorizzazione oltre che di potenza di calcolo.
- Non è ancora stato risolto in maniera soddisfacente (vedi [22]) il problema del recupero della componente di *tip-tilt* utilizzando stelle di riferimento artificiali. Nonostante siano state proposte molte tecniche profondamente diverse nessuna si è mostrata del tutto efficace in pratica. Purtroppo abbiamo già visto che il tip-tilt dà il contributo più pesante per quello che riguarda il degrado dell'immagine in osservazioni sub-atmosfera.

I capitoli 6 e 7 presentano 2 tecniche di recupero dell'immagine che non necessitano di stelle di riferimento e sono adatte a realizzazioni a basso costo come *add-on* per telescopi già operativi.

- La tecnica SAA è concettualmente molto semplice. Purtroppo è limitata ad oggetti *point-source dominated* (vedi discussione a pagina 90 e seguenti). Nei casi in cui è applicabile può fornire, se opportunamente calibrata, una risposta fotometrica discreta e buone capacità di risoluzione.
- La tecnica di *speckle-interferometry* è intrinsecamente adatta a stelle doppie (o al limite triple), ma in questo campo dà risultati eccellenti. Se vogliamo ottenere anche immagini vere e proprie dobbiamo passare alle tecniche di *speckle-imaging*. Queste sono più complicate, ma comunque realizzabili in software, che opera in tempo reale.

In questo lavoro è stata presentata un'ampia prospettiva delle problematiche legate alle osservazioni ad alta risoluzione spazio-temporale subatmosfera. Alcuni punti non sono stati trattati, tra cui la completa modellizzazione dei sistemi ad ottica adattiva e delle moderne tecniche di recupero dell'immagine a PSF ignota. Comunque l'autore spera di poter approfondire anche queste tematiche in lavori futuri.

Appendice A

Normalizzazione delle subarmoniche

In questa appendice vediamo come è possibile scegliere in modo acconcio i pesi di normalizzazione delle subarmoniche per la generazione dello schermo di fase tramite FFT. Quanto scritto si basa sul recente lavoro di SEDMAK e quindi non è ancora apparso in letteratura.

A.1 Descrizione del metodo

Riprendiamo il discorso sulle subarmoniche nel metodo di generazione dello schermo di fase tramite FFT. Abbiamo visto che a ogni generazione di subarmonica la dimensione dello schermo di fase g viene aumentata di un fattore 3. Quindi alla generazione p -esima la dimensione¹ è $3^p g$. Tenendo conto del teorema del campionamento e del fatto che lo spettro viene campionato su una griglia 3×3 otteniamo le frequenze di campionamento delle subarmoniche come (ik, jk) con $k = (3^p g)^{-1}$ e con i e j compresi tra -1 e 1 .

La componente spettrale $(0, 0)$ è eliminata ad ogni passo di generazione delle subarmoniche. Possiamo tenerne conto moltiplicando le restanti componenti per un fattore correttivo σ , il quale tiene conto dell'energia persa nella componente centrale. Valutiamo l'energia $\mathcal{P}_{i,j}$ presente nella componente a frequenza spaziale (ik, jk) . Per far ciò teniamo conto che la campionatura convolve il rumore gaussiano in entrata con una *data-window* di forma quadrata. Perciò $\mathcal{P}_{i,j}$ può essere espresso come (vedi [21], capitolo sui metodi spettrali):

$$\mathcal{P}_{i,j} = \iint \mathcal{P}(\vec{f}) W\left(\frac{\vec{f}}{3^p g} - (i, j)\right) d\vec{f} \quad (\text{A.1})$$

¹Abbiamo già visto che per quanto riguarda le subarmoniche possiamo limitarci al caso di schermo di fase quadrato.

dove $\mathcal{P}(\vec{f})$ è lo spettro di potenza di VON KARMAN in 2 dimensioni e $W(f_i, f_j)$ è:

$$W(f_i, f_j) = \left(\frac{\sin(\pi f_i)}{\pi f_i} \right)^2 \left(\frac{\sin(\pi f_j)}{\pi f_j} \right)^2 \quad (\text{A.2})$$

Notiamo come in questi passaggi si sia passati a una rappresentazione in funzione dei *bin* di frequenza.

Il coefficiente di correzione σ vale quindi:

$$\sigma = \frac{\sum_{i=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 \mathcal{P}_{i,j}}{\sum_{i=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 \mathcal{P}_{i,j} - \mathcal{P}_{0,0}} \quad (\text{A.3})$$

A.2 Risultati

Gli esperimenti numerici sono stati realizzati su un supporto 30×30 m in modo da essere confrontabili con quelli della sezione 4.4.1. I coefficienti di correzione per vari valori di L_0 sono graficati in figura A.4.

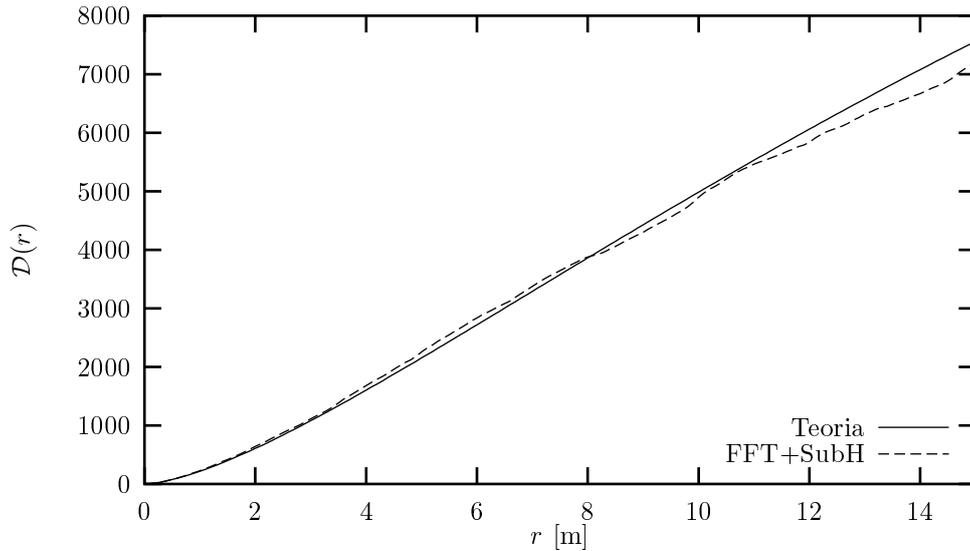


Figura A.1: Funzione di struttura ottenuta col metodo FFT+Subarmoniche. Supporto 30×30 metri, $r_0 = 0.10$ m e $L_0 = 100$ m. Sono state mediate 500 realizzazioni indipendenti.

Dalle figure A.1, A.2 e A.3 si vede la miglior resa nell'approssimare la funzione di struttura. Il miglioramento è notevole soprattutto nel caso di statistica di KOLMOGOROV, che rappresenta il caso più difficile vista la divergenza nello spettro di potenza teorico. In questo caso si è proceduto ad

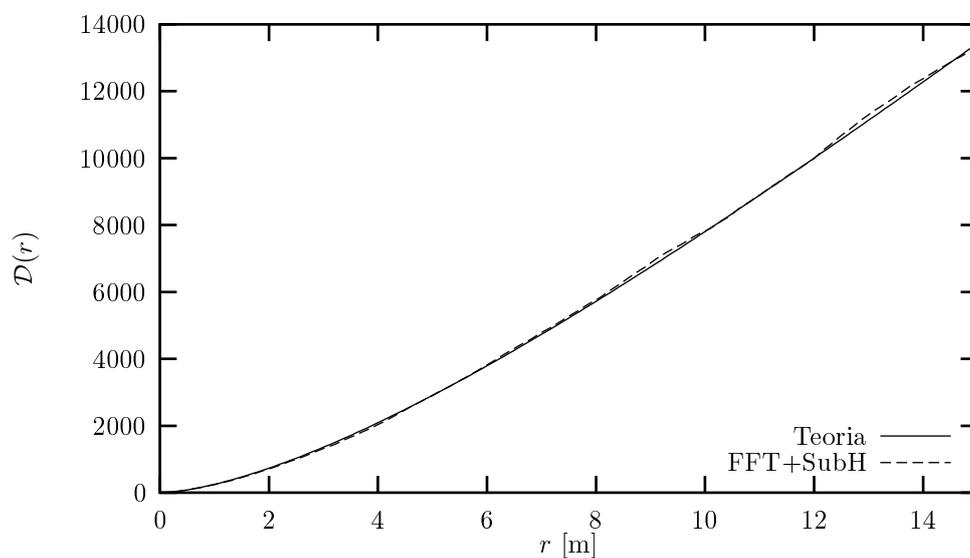


Figura A.2: Funzione di struttura ottenuta col metodo FFT+Subarmoniche. Supporto 30×30 metri, $r_0 = 0.10$ m e $L_0 = 300$ m. Sono state mediate 500 realizzazioni indipendenti.

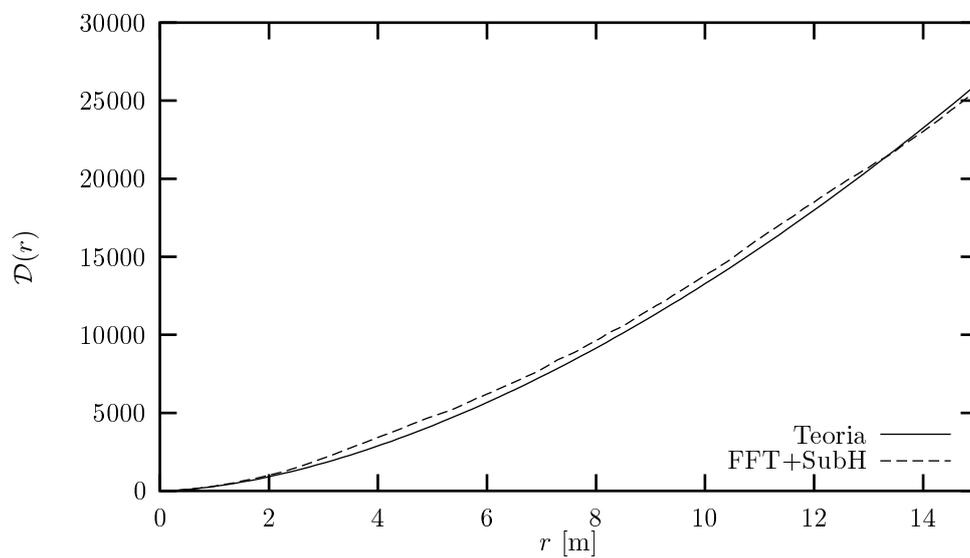


Figura A.3: Funzione di struttura ottenuta col metodo FFT+Subarmoniche. Supporto 30×30 metri, $r_0 = 0.10$ m e $L_0 \rightarrow \infty$. Sono state mediate 500 realizzazioni indipendenti.

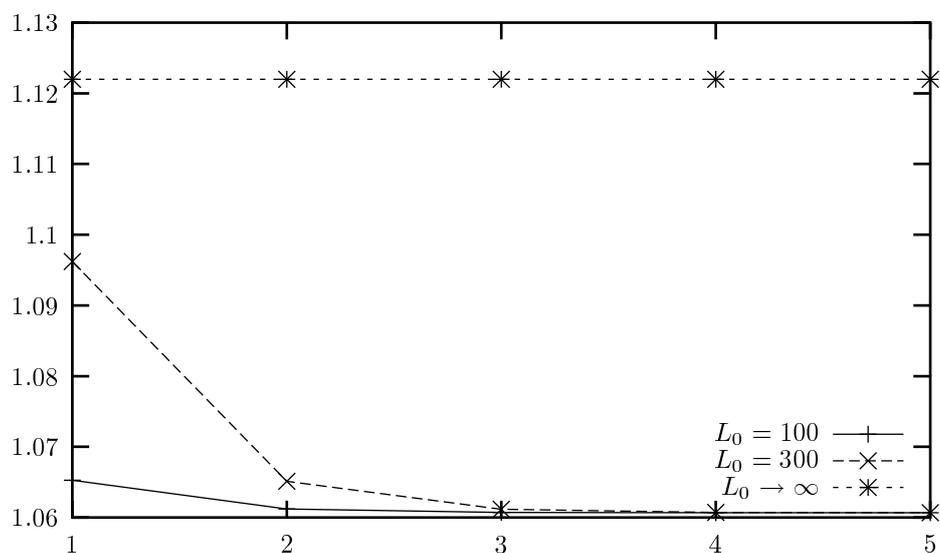


Figura A.4: Fattore di correzione σ in funzione del livello di subarmonica.

un'opportuna approssimazione numerica per evitare questa divergenza nel calcolo di $\mathcal{P}_{0,0}$.

Dalla figura A.4 possiamo vedere come i valori di σ tendono, per un ordine di subarmonica alto, al valore $\sqrt{9/8}$ visto nel testo. Inoltre è interessante notare come i coefficienti di correzione siano comunque prossimi all'unità: tutto ciò stà a testimoniare che il problema delle subarmoniche è numericamente delicato da trattare.

Appendice B

Software utilizzato

In questa appendice sono presentati i programmi utilizzati per lo svolgimento delle simulazioni analizzate nel testo. I programmi sono tutti sviluppati come software libero (licenza GPL) e sono disponibili in Rete¹.

B.1 Generazione dello schermo di fase tramite FFT

La generazione dello schermo di fase tramite FFT è effettuata tramite un programma scritto in C (`layer_fft.c`). Si è preferito questo approccio per 2 motivi:

- La possibilità di utilizzare al massimo le risorse della macchina. Grazie all'utilizzo della FFT e della tecnica di SEDMAK per il calcolo delle subarmoniche su un supporto sotto-campionato il programma è estremamente veloce e ha come unico limite pratico la grandezza della memoria centrale del calcolatore (purtroppo la FFT non si presta a funzionare bene utilizzando la memoria su disco). Su macchine da 128M di *core memory* possono essere simulati schermi da 100×100 metri e 3200×3200 pixel in tempi del tutto ragionevoli. Questo ci permette di non aver problemi per valori di L_0 alti e *aspect-ratio* spinti. Dallo schermo di formato quadrato possono essere facilmente estratti più schermi indipendenti di formato più utile (ad esempio 120×4 m).
- Il programma in C è facilmente portabile su architetture diverse, a seconda della necessità. I calcoli sono stati effettuati su architetture Intel e Alpha.

Il programma utilizza le librerie FFTW e GSL (vedi sezione B.4). La sintassi di partenza è

```
layer_fft [opzioni] [file in uscita]
```

¹All'indirizzo <ftp://sole.infis.univ.ts.it/pub/chri/seeing>

e in [file in uscita] verrà generato uno schermo di fase adatto all'utilizzo nei programmi di simulazione presentati in sezione B.3. Le opzioni riconosciute dal programma sono:

- s **intero** Imposta la scala di uscita dello schermo (numero di pixel per metro).
- x **reale** Dimensioni sull'asse x dello schermo.
- y **reale** Dimensioni sull'asse y dello schermo.
- r **reale** Valore di r_0 .
- L **reale** Valore di L_0 .
- h **intero** Numero di subarmoniche.
- k **0,1,2** Applica correzione dell'*aspect-ratio*. 0 no, 1 automatica, 2 manuale.
- w **reale** Peso della componente dell'asse x se $-k = 2$.
- W **reale** Peso della componente dell'asse y se $-k = 2$.
- f **nome-file** Scrivi lo schermo di fase aspetto nel file **nome-file**.
- v Attiva maggior output delle operazioni effettuate.
- z **nome-file** Mantieni la saggezza della libreria FFTW nel file **nome-file**.
- e **intero** Seme del generatore di numeri casuali.
- m **0,1** Metodo utilizzato per il calcolo delle subarmoniche: 0 LANE, GLINDEMANN AND DAINTY, 1 JOHANSSON AND GAVEL.
- S **intero** Rapporto di sottocampionamento dello schermo delle subarmoniche.
- c **nome-file** Legge i pesi delle subarmoniche dal file **nome-file**.

B.2 Generazione dello schermo di fase tramite serie di Fourier

L'algoritmo di simulazione basato su serie di FOURIER è notevolmente più lento rispetto al precedente e, in genere, non presenta particolari vantaggi in termini di qualità. È stato comunque implementato dal programma C `layer_fs.c`, che presenta una sintassi simile al precedente:

```
layer_fs [opzioni] [file in uscita]
```

Le possibili opzioni sono:

- s intero** Imposta la scala di uscita dello schermo (numero di pixel per metro).
- r reale** Valore di r_0 .
- L reale** Valore di L_0 .
- v** Attiva maggior output delle operazioni effettuate.
- e intero** Seme del generatore di numeri casuali.
- D reale** Dimensione del supporto per il calcolo dei coefficienti dello sviluppo in serie.
- m 0** Modo rettangolare, le dimensioni dello schermo di uscita sono date mediante i parametri:
 - x reale** Dimensioni sull'asse x dello schermo.
 - y reale** Dimensioni sull'asse y dello schermo.
- m 1** Modo "avvitato", il programma sfrutta la periodicità del supporto di calcolo dei coefficienti per ottenere lo schermo della maggior lunghezza possibile una volta fissata la larghezza:
 - y reale** Dimensioni sull'asse y dello schermo.
- m intero** > 9 Modalità test, viene mediata la funzione di struttura dal numero specificato di realizzazioni indipendenti. I risultati rispettivamente per l'asse x , y e la diagonale, vengono riportati nei file x , y e d .

B.3 Programmi di simulazione in PDL

Le simulazioni sono state svolte utilizzando l'ambiente PDL (*Perl Data Language*). Questo è un ambiente per il *number-crunching* ad alte prestazioni basato sul linguaggio Perl, dal quale eredita l'estrema eleganza sintattica ed espressività semantica.

Per lo svolgimento del lavoro è stata sviluppata una serie di interfacce a librerie preesistenti e una collezione di oggetti che permettono una veloce e conveniente realizzazione di una vasta gamma di simulazioni del *seeing*.

B.3.1 Oggetti e funzioni realizzati

SIM (pacchetto SIM.pm)

Questo oggetto rappresenta un'intera simulazione. Una volta creato può essere utilizzato per ottenere immagini per un dato set di parametri. Vediamone i metodi definiti.

new(modelo turbolenza, diametro pupilla, supporto immagini, separazione PSF-immagine, numero fotoni immagine, rumore additivo immagine, numero fotoni PSF, rumore additivo PSF, array di sorgenti). Il metodo **new** inizializza una nuova simulazione, la quale viene identificata per mezzo del riferimento restituito. Gli unici parametri che necessitano di ulteriori chiarificazioni sono la descrizione del modello di turbolenza utilizzato e l'array che contiene le immagini delle sorgenti osservate. Il primo è un array di strutture: ogni elemento rappresenta uno strato di turbolenza. I parametri di questo, ovvero file con lo schermo di fase (generato dai programmi descritti in sezione B.1), velocità, altezza e direzione, sono contenuti nella relativa struttura. Un esempio di definizione di modello di turbolenza è il seguente:

```
$greenwood = [
    {
        fname => "${prefix1}0.084-30-3-1.cut",
        v => 5,
        h => 200,
        d => 0
    },
    {
        fname => "${prefix1}0.310-30-3-1.cut",
        v => 10,
        h => 2000,
        d => 90
    },
    {
        fname => "${prefix1}0.536-30-3-1.cut",
        v => 15,
        h => 10000,
        d => 0
    },
    {
        fname => "${prefix1}4.588-30-3-1.cut",
        v => 20,
        h => 18000,
        d => 90
    }
];
```

Le immagini in entrata sono contenute in un array di matrici. Si noti che il programma può lavorare su più immagini per volta per migliorare l'efficienza

maxt(). Restituisce il tempo massimo utilizzabile per la simulazione.

set_yoff(pixel) e **set_yoffm(metri)**. Imposta un offset perpendicolare alla direzione di scorrimento nella lettura degli schermi di fase in pixel o in metri. Serve per sfruttare più strisce parallele di schermi a grande formato.

get(tempo). Ritorna un array con la PSF simulata più le immagini simulate degli oggetti precedentemente impostati col metodo **new**.

FW (pacchetto Img)

É un oggetto che serve per realizzare la deconvoluzione di FOURIER-WIENER. Questo oggetto funziona solo per immagini da 512×512 pixel. Può essere controllato mediante i seguenti metodi.

new(). Inizializza le strutture necessarie per la deconvoluzione e ritorna il riferimento all'oggetto creato.

initFW(immagine, psf). Inizializza il filtro inverso utilizzando gli spettri di potenza dell'immagine e della psf passati come parametri.

decoFW(immagine, psf). Effettua la deconvoluzione tenendo conto del filtro inverso definito mediante il metodo **initFW**. Ritorna il risultato della deconvoluzione.

FW2 (pacchetto Img)

É simile al precedente con la differenza che il metodo **initFW** può essere chiamato più volte e il filtro è calcolato in base alla media degli spettri di potenza delle singole immagini. Questo oggetto funziona solo per immagini da 512×512 pixel.

Funzioni varie (pacchetto Img)

mod2_spec(matrice). Restituisce il quadrato dello spettro di potenza della matrice passata come parametro.

saa(matrice). Restituisce l'immagine rappresentata dalla matrice centrandola sul massimo.

circ_med(matrice). Effettua la media circolare della matrice quadrata in entrata e la restituisce sotto forma di array.

save_image(nome file, matrice). Memorizza la matrice in entrata nel formato PPM e PDL fast-raw in un file con il nome dato.

mag(magnitudine, diametro pupilla). Restituisce il numero di fotoni equivalenti ad un flusso di magnitudine data su una pupilla di diametro specificato in un centesimo di secondo.

rl(immagine, psf, numero massimo iterazioni). Effettua la deconvoluzione di RICHARDSON-LUCY con un numero massimo di iterazioni. Restituisce l'immagine deconvoluta.

image512_256(array di matrici). Dimezza le dimensioni di una coppia di matrici 512×512 che rappresentano una PSF e un'immagine in entrata e le immerge in matrici della stessa grandezza effettuando un'acconcia apodizzazione.

rotate(matrice, x, y). Restituisce la matrice di ingresso rotata del numero di pixel specificato sui 2 assi.

B.3.2 Esempi di simulazioni

Di seguito sono riportati vari esempi di utilizzo dell'ambiente di simulazione ora descritto. Il primo programma illustra una semplice simulazione nella quale calcoliamo il SNR risultante dall'imaging a breve tempo di esposizione di 2 oggetti attraverso l'atmosfera e la funzione di sharpness S_4 .

```
#!/usr/bin/perl -I.

use PDL;                               # include le librerie PDL

use PDL::IO::FastRaw;                   # libreria IO PDL

use PDL::Lib::FFTW;                     # librerie per la FFT
use SIM;                                 # libreria di simulazione
use Img;                                 # utilità per elaborare l'immagine

$prefix1 = '/mnt/image/chri/layers/';
require "layers";                        # definizione dei layer per
                                         # vari modelli di turbolenza

load_wisdom("/tmp/.wisdom");             # saggezza per la FFT

$ogg1 = "doppia.pdl";                    # file che contengono le
$ogg2 = "eta.pdl";                       # immagini per le simulazioni
```

```

@images = (
    float (readfraw ($ogg1)),
    float (readfraw ($ogg2))
);

$mag_ogg = 8;                # magnitudine oggetto osservato
$diam = 1.8;                # diametro pupilla

$sim = SIM->new($greenwood, $diam, 512, 0,
               mag($mag_ogg,$diam), 0, 0.1, 0, @images);
# inizializza la simulazione

$step= 0.01;                # intervallo tra 2 frames
$q1 = zeroes float,512,512;
$q2 = zeroes float,512,512; # variabili che contengono le
$qq1 = zeroes float,512,512; # medie correnti
$qq2 = zeroes float,512,512;

open S1, ">s1";             # file di uscita per
open S2, ">s2";             # lo sharpness

for( $t=0,$n=0; $t<$sim->maxt() and $n<10; $t+=$step,$n++ ) {
# loop su tutta la durata della simulazione
    ($tpsf, $tim1,$tim2) = $sim->get($t);
# simula nuova immagine: doppia in $tim1 e eta in $tim2

    $s4 =sum($tim1*rvals($tim1)*rvals($tim1));
    print S1 "${s4}\n";
    $s4 =sum($tim2*rvals($tim2)*rvals($tim2));
    print S2 "${s4}\n";
# calcola la funzione di sharpness s4

    $q = mod2_spec($tim1) - sum($tim1);
    $q1 += $q; $qq1 += $q*$q;
    $q = mod2_spec($tim2) - sum($tim2);
    $q2 += $q; $qq2 += $q*$q;
# calcola lo spettro in $q togliendo il bias poissoniano e
# accumula i momenti primo e secondo

    print STDERR "$n\n";
}

$q1/=$n; $qq1/=$n;

```

```

$q2/=$n; $qq2/=$n;
# effetua la media

$mmsnr1=$q1/sqrt($qq1 - $q1*$q1); $msnr1 = circ_med($msnr1);
$mmsnr2=$q2/sqrt($qq2 - $q2*$q2); $msnr2 = circ_med($msnr2);
# calcola il SNR ed effettua la media circolare

open F1, ">snr1";
open F2, ">snr2";
for($i=0;$i<256;$i++) {
    print F1 $msnr1->at($i),"\n";
    print F2 $msnr2->at($i),"\n";
}
# stampa su file il SNR

```

Il secondo esempio effettua la deconvoluzione di una serie di immagini *short-time* utilizzando il metodo di FOURIER-WIENER con una data separazione oggetto-riferimento.

```

#!/usr/bin/perl -I.

use PDL;                                # include le librerie PDL

use PDL::IO::FastRaw;                    # libreria IO PDL

use PDL::Lib::FFTW;                       # librerie per la FFT
use SIM;                                   # libreria di simulazione
use Img;                                   # utilità per elaborare l'immagine

$prefixl = '/mnt/image/chri/layers/';
require "layers";                          # definizione dei layer per
                                           # vari modelli di turbolenza

load_wisdom("/tmp/.wisdom");               # saggezza per la FFT

@images = (
    float (readfraw ("doppia.pdl"))
);                                           # oggetto da simulare

$mag_ogg = 6;                              # magnitudine oggetto osservato
$mag_psf = 4;                              # magnitudine psf di riferimento
$diam = 1.8;                               # diametro pupilla
$sep = 5;                                   # separazione in secondi d'arco
$step = 0.01;

```



```

$diam = 1.8;                                # diametro pupilla
$step = 0.01;

$sim = SIM->new($greenwood, $diam, 512, 100,
              mag($mag_ogg,$diam), mag($mag_psf,$diam),
              0.1, 0.1, @images);

$out = zeroes float,512,512;    # immagine finale
$out_psf = zeroes float,512,512; # psf finale

for( $t=0,$n=0; $t<$sim->maxt() and $n<1000; $t+=$step,$n++ ) {
    ($tpsf, $tim) = $sim->get($t);

    $out += saa($tim);           # SAA immagine
    $out_psf += saa($tpsf);     # SAA PSF

    print STDERR "$n\n";
}

($out_psf,$out)=image512_256(
                        rotate_image($out_psf/$n,256,256),
                        $out/$n
                    ); # adatta il formato

($deco,$it) = rl($out,$out_psf,2000); # deconvoluzione di RL

print STDERR "Fatte $it iterazioni RL\n";
save_image("outSAAdeco",$deco); # memorizza risultato

```

B.4 Ringraziamenti informatici

Innanzitutto devo ringraziare il prof. G. SEDMAK che mi ha gentilmente fornito i codici di riferimento (in IDL e MatLab) degli algoritmi utilizzati nel lavoro di tesi. Oltre a ciò è stato sempre disponibile a chiarire i miei dubbi su molti aspetti del lavoro svolto.

In secondo luogo è doveroso ringraziare tutti gli autori di *software libero* che mi hanno permesso di lavorare in un ambiente informatico più vicino ai *veri* principi scientifici dell'importanza del sapere e della collaborazione che alle logiche commerciali. Di seguito sono riportati i componenti software che hanno avuto un ruolo preponderante in questo lavoro. Grazie ancora a tutti gli autori.

- Il sistema Linux-GNU-X
<http://www.linux.org>

<http://www.gnu.org>
<http://www.xfree.org>

- Il sistema di *typesetting* L^AT_EX
<http://www.tug.org>
- La GNU Scientific Library
<ftp://alpha.gnu.org>
- La libreria FFTW, *Fastest Fourier Transform in the West*
<http://theory.lcs.mit.edu/fftw>
- L'ambiente PDL, *Perl Data Language*
<http://pdl.perl.com>
- Octave, un ambiente di calcolo a matrici compatibile Matlab
<http://www.che.wisc.edu/octave/>

Bibliografia

- [1] C. BARBIERI, “The GALILEO Italian National Telescope and its Instrumentation”, TNG Technical Report, **53**
- [2] F. BUFFA, I. PORCEDDU, “Temperature forecast and dome seeing minimization”, TNG Technical Report, **57**
- [3] D.F. BUSCCHER, J.T. ARMSTRONG, C.A. HUMMEL, A. QUIRRENBACH, D. MOZURKEWICH, K.J. JOHNSTON, C.S. DENISON, M.M. COLAVITA, M. SHAO, “Interferometric seeing measurements on Mt. Wilson: power spectra and outer scales”, *Applied Optics*, **34**, 1081-1096 (1995)
- [4] J.C. CHRISTOU “Infrared speckle imaging: data reduction with application to binary stars”, *Experimental Astronomy*, **2**, 27-56, 1991
- [5] S. ESPOSITO, E. MARCHETTI, R. RAGAZZONI, A. BARUFFOLO, J. FARINATO, L. FINI, A. GHEDINA, P. RANFAGNI, A. RICCARDI, “Laboratory characterization of an APD-based tip-tilt corrector”, TNG Technical Report, **70**
- [6] S. ESPOSITO, R. RAGAZZONI, A. RICCARDI, “Focus anisoplanatism effects on tip-tilt compensation for Adaptive Optics using sodium laser beacon as tracking reference”, TNG Technical Report, **57**
- [7] L. FINI, P. RANFAGNI, “The TNG Tip-Tilt Servo-Loop”, TNG Technical Report n. 54
- [8] A. GLINDEMANN, N. REES, “Photon Counting vs. CCD sensors for wavefront sensing - Performance comparison in the presence of noise”, in *Advanced Technology Optical Telescopes*, proc. SPIE **2199**, 824-834 (1994)
- [9] J.W. GOODMAN, *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill, 1968
- [10] J.W. GOODMAN, *Statistical Optics*, John Wiley & Sons, 1985

- [11] R.J. HANISCH, R.L. WHITE, R.L. GILLAND, “Deconvolution of Hubble Space Telescope Images and Spectra”, in *Deconvolution of images and Spectra*, Academic Press, 1997
- [12] G.C. HOLST, *CCD, Array, Cameras and Displays*, SPIE Press, 1996
- [13] P.A. JANSSON, “Traditional Linear Deconvolution methods”, in *Deconvolution of Images and Spectra*, Academic Press, 1997
- [14] P.A. JANSSON, “Modern Constrained Nonlinear Methods”, in *Deconvolution of Images and Spectra*, Academic Press, 1997
- [15] H. JAKOBSSON, “Simulations of time series of atmospherically distorted wave fronts”, in *Applied Optics*, **35**, 1561-1565 (1996)
- [16] E.M. JOHANSSON, D.T. GAVEL, “Simulation of stellar speckle imaging”, in *Amplitude and Intensity Spatial Interferometry II*, proc. SPIE **2200**, 372-383 (1994)
- [17] S.G. JOHANSON, M. FRIGO, “The Fastest Fourier Transform in the West”, MIT technical report MIT-LCS-TR-728 (97)
- [18] E. MARCHETTI, R. RAGAZZONI, “Sky coverage with the auxiliary telescopes LGS tilt recovery techniques”, TNG Technical Report, **60**
- [19] J.M. MARIOTTI, “Introduction to Fourier Optics and Coherence”, in *Diffraction-Limited Imaging with Very Large Telescopes*, Kluwer Academic Publisher, 1989
- [20] C. MOROSI, F. FRANCHINI, S. FURLANI, G. SEDMAK, “On-line image selection for the Italian Telescopio Nazionale Galileo (TNG): numerical simulation and performance evaluation”, TNG Technical Report, **70**
- [21] W. PRESS, B. FLANNERY, S. TEUKOLSKY, W. VETTERLING, *Numerical Recipes - The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, 1986
- [22] R. RAGAZZONI, “Laser Guide Star Advanced Conceptd: Tilt Problem”, TNG Technical Report, **68**
- [23] R. RAGAZZONI, “Robust tilt estimation from Laser Guide Star using a combination of different techniques”, TNG Technical Report, **61**
- [24] R. RAGAZZONI, E. MARCHETTI, R. BRUSA, “The effective layer height for star wandering and the accuracy of tilt sensing in multicolor laser stars”, TNG Technical Report, **58**

- [25] R. RAGAZZONI, “Absolute Tip-Tilt Determination via Laser Beacon”, TNG Technical Report, **52**
- [26] R. RAGAZZONI, “Propagation delay of a laser beacon as a tool to retrieve absolute tilt measurements”, TNG Technical Report, **56**
- [27] R. RAGAZZONI, comunicazione privata (1999)
- [28] F. RODDIER, “The effects of atmospheric turbulence in optical astronomy”, in *Progress in Optics*, North-Holland Publ., **19**, 281-376 (1981)
- [29] F. RODDIER, “Atmospheric wavefronts simulation using Zernike polynomials”, in *Optical Engineering*, **2199**, 1174-1180 (1990)
- [30] D.J. SCHROEDER, *Astronomical Optics*, Academic Press, 1987
- [31] G. SEDMAK, “Performance analysis of and compensation for aspect-ratio effects of fast-Fourier-transform-based simulations of large atmospheric wave fronts”, in *Applied Optics*, **37/21** 4605-4613 (1998)
- [32] G. SEDMAK, comunicazione privata (1999)
- [33] G. SEDMAK, “Sistemi per osservazioni astronomiche da terra: simulazione del seeing astronomico”, in *AstroTech Journal*, **2**, disponibile in Rete all'indirizzo <http://www.sait.it/astrotech>
- [34] J. VERNIN, G. WEIGLET, J.L. CACCIA, M. MÜLLER, “Speckle lifetime and isoplanicity determinations: direct measurements and derivation from turbulence and wind profiles”, in *Astronomy and Astrophysics*, **243**, 553-558 (1991)
- [35] J. VERNIN, C. MUÑOZ-TUÑÓN, “Optical seeing at La Palma Observatory”, in *Astronomy and Astrophysics*, **284**, 311-318 (1994)
- [36] M.C. ROGGERMAN, B. WELSH, *Imaging through Turbulence*, CRC Press, 1996
- [37] M.C. ROGGERMAN, B. WELSH, D. MONTERA, T.A. RHOADARMER, “Method for simulating atmospheric turbulence phase effects for multiple time slices and anisoplanatic conditions”, in *Applied Optics*, **34/20**, 4037-4051 (1995)